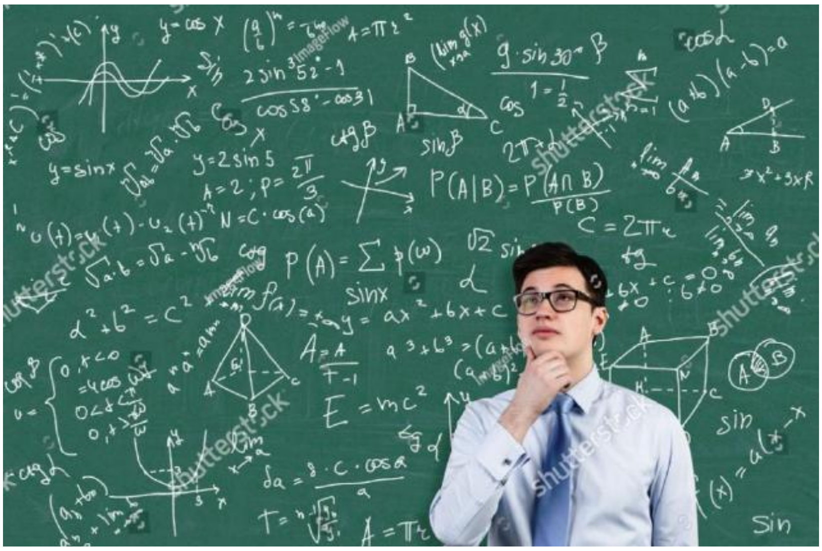
निदेशालय, माध्यमिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर

प्रयास–2018

विषय – गणित

कक्षा – 10



माध्यमिक परीक्षा परिणाम में गुणात्मक एवं संख्यात्मक उन्नयन हेतु अभिनव कार्ययोजना के तहत निर्मित अध्ययन सामग्री

निदेशालय, माध्यमिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर

बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु राज्य स्तरीय गणित कार्यशाला

प्रयास–2018

मार्ग दर्शन

नथमल डिडेल I.A.S.
निदेशक

दिशा–निर्देश

भरत कुमार मेहता
उप निदेशक (माध्यमिक) उदयपुर
नरेश चन्द्र डांगी
जिला शिक्षा अधिकारी (मा.–प्रथम) उदयपुर

नोडल अधिकारी

अरूण कुमार शर्मा
सहायक निदेशक, निदेशालय, मा.शि., राजस्थान, बीकानेर

आयोजन प्रभारी

भैरूलाल तेली
प्रधानाचार्य, रा.गु.गो.सिंह उ.मा.वि., उदयपुर
सुरेन्द्र सिंह राव
सहायक निदेशक, का. उप निदेशक (माध्यमिक) उदयपुर
शान्ति लाल चौबीसा
शै.प्र. अधिकारी, का. उप निदेशक (माध्यमिक) उदयपुर

पर्यवेक्षण

सुभाष माचरा
शै.प्र. अधिकारी, निदेशालय, मा.शि., राजस्थान, बीकानेर

निदेशालय, माध्यमिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर

प्रयास–2018

विषय – गणित

(पाठ्य सामग्री)

कक्षा – 10

अनुक्रमणिका

अध्याय - 1

वैदिक गणित

अंक भार - 4

एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा गुणा करना

(1) Type -I जब आधार 10 हो

1) 15	2) 25	3) 32	4) 53	5) 122
x 15	x 25	x 38	x 57	x 128
$1 \times \dot{1}/5 \times 5$	$2 \times \dot{2}/5 \times 5$	$3 \times \dot{3}/16$	$30/21$	$12 \times 1\dot{2}/16$
(प्रथमखण्ड / द्वितीयखण्ड)			$= 3021$	$= 15616$
$= 1 \times 2/25$	$= 2 \times 3/25$	$= 1216$ (12 कैसे आया ?)		
$= 225$	$= 625$			

ध्यान से देखें

यहॉ सभी उदाहरणों में

(1) इकाई के अंको का योग 10 है।

(2) दहाई के अंक समान है।

करके सीखें –

1) 24	2) 32	3) 43	4) 27
x 26	x 38	x 47	x 23

नियम – एकाधिकेन पूर्वेण की गुणन संक्रिया में जब इकाई के अंको का योग 10 होता है तब ईकाई के अंको को गुणा करके संख्या को (गुणनफल को) द्वितीय खण्ड में लिख देते है।

(2) दहाई के अंक को उसके एकाधिक से गुणा करके गुणनफल को प्रथम खण्ड में लिख देते है।

प्रयास करें

1) 82	2) 54	3) 29	4) 152
x 88	x 56	x 21	x 158

Type -II जब आधार 100 हो

1) 512	2) 392	3) 811
x 588	x 308	x 889
$5 \times \dot{5}/12 \times 188$	$3 \times \dot{3}/92 \times 08$	$8 \times \dot{8}/11 \times 89$
$= 5 \times 6/1056$	$= 3 \times 4/736$	$= 72/0979$
$= 30/1056$	$= 12/0736$	$= 720979$
$= 309056$	$= 120736$	

ध्यान से देंखें

(1) यहॉ सभी उदाहरणों में ईकाई के अंको का योग तो 10 है परन्तु शेष अंक समान नहीं है अतः यहॉ हम ईकाई व दहाई अंको का योगफल करेंगें जो 100 है। जैसे 512 व 588 में 12+88= 100

(2) सैकड़े का अंक समान है।

करके सीखें

1) 108	2) 266	3) 390	4) 584

x 192 x 234 x 310 x 516

नियम– एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा गुणन संक्रीया में जब ईकाई व दहाई के अंको का योग 100 हो तब ईकाई व दहाई के अंको को गुणा करके गुणनफल को द्वितीय खण्ड में लिख देते है व सैंकड़े के अंक को उसके एकाधिक से गुणा करके प्रथम खण्ड में लिख देते है।

Note- यहाँ आधार 100 होने के कारण द्वितीय खण्ड में चार अंक होने अनिवार्य है यदि चार अंक नहीं है तो संख्या के पूर्व में शून्य लगाकर चार अंक करेंगें।

उदाहरण $06 \times 94 = 564$, इसे 0564 लिखेंगें।

प्रयास करें 1) 522 x 578 2) 608 x 692 3) 314 x 386 4) 213 x 287

Type - III

एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा भिन्नों की गुणा करना

1) $3\frac{1}{3} \times 31\frac{2}{3}$ 2) $21\frac{1}{5} \times 21\frac{4}{5}$ 3) $15\frac{2}{7} \times 15\frac{5}{7}$

$= 31 \times \dot{3}1/\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$ $= 21 \times \dot{2}1/\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}$ $=15 \times \dot{1}5/\frac{2}{7} \times \frac{5}{7}$

$= 31 \times 32/\frac{2}{9}$ $= 462/\frac{4}{25}$ $= 240/\frac{10}{49}$

$= 992\frac{2}{9}$

ध्यान से देखें

(1) यहाँ सभी उदाहरणों में भिन्न संख्या का योग 1 है जैसे उदाहण (1) में $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

(2) पूर्ण संख्या समान है।

करके सीखें

1) $12\frac{2}{5} \times 12\frac{3}{5}$ 2) $16\frac{1}{7} \times 16\frac{6}{7}$ 3) $25\frac{1}{4} \times 25\frac{3}{4}$

नियम – (1) भिन्न संख्या का गुणन द्वितीय खण्ड में लिखते है।

(2) पूर्ण संख्या को एकाधिक से गुणा करके प्रथम खण्ड में लिखते हैं।

प्रयास कीजिए।

1) $11\frac{1}{6} \times 11\frac{5}{6}$ 2) $33\frac{1}{3} \times 33\frac{2}{3}$ 3) $24\frac{1}{6} \times 24\frac{5}{6}$ 4) $18\frac{1}{4} \times 18\frac{3}{4}$

उपसूत्र :– यावदूनम तावदूनी कृत्य वर्गम् च योजयेत्

यावदूनम तावदूनी में आधार से जितन विचलन हो, उतना जोडते है।

जैसे उदाहरण 1. $16^2 = 16 + 6/6^2$ आधार = 10 विचलन= 6

$= 22/36$ $= 256$

उदाहरण 2. $93^2 = 93 - 07/07^2$ आधार = 100 विचलन= -07

(आधार 100 में शून्य अतः दाहिने खण्ड में दो अनिवार्य)

$= 86/49$ $= 8649$

उदाहरण 3. $43^2 = 4(43 + 3) - 07/07^2$ आधार = 10

उपआधार = 4×10

विचलन = $+3$

$= 4(46)/9$

$= 184/9$

$= 1829$

उदाहरण 4. $327^2 = 3(327 + 27)/27^2$ आधार = 10

उपआधार $= 3 \times 10$

विचलन $= 27$

$= 3(354)/729$ (आधार 100 में दो शून्य अतः दाहिने खण्ड में दो अंक)

$= 1062/729$

$= 106929$

करके सीखों

निम्न संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए–

(1) 13^2 (2) 104^2 (3) 37^2 (4) 221^2

नियम : (1) आधार एवं उपआधार लिखें। उत्तर के लिए दो खण्ड बनाना।

(2) आधार या उपाधार के सापेक्ष किसी संख्या में न्यूनता हो तो उस न्यूनता को घटाना एवं अधिकता हो तो उस अधिकता को जोडना।

(3) द्वितीय खण्ड में न्यूनता अथवा अधिकता का वर्ग लिखना।

(4) आधार अथवा उपाधार में जितने शून्य हो उतने अंक द्वितीय खण्ड में रखना। अंक कम होने पर द्वितीय खण्ड की संख्या के पहले निर्धारित संख्या में शून्य लगाना एवं अधिक हो तो प्रथम खण्ड में स्थानान्तरण।

निखिलम विधि से घनफल

$14^3 = 14$ का घनफल

संख्या	विचलन	
14	+4	(आधार –10)
14	+4	(आधार –10)
14	+4	(आधार –10)

14+4+4/4x4+4x4+4x4/4 X4X 4 विचलन को तीन बार गुणा

दो–दो विचलन का गुणा तथा तीनो का जोड शून्य

$22/\ 16 + 16 + 16/\ 64$

$22/\ 48/\ 64$ आधार 10 में एक शून्य है अतः एक अंक रखकर दूसरा अंक अगले खण्ड में जोडते है।

$22/\ 48 + 6/\ 4$

$22/\ 54/\ 4$ आधार 10 में एक शून्य है अतः पुनः वही प्रक्रीया दोहरायेंगे।

$22 + 5/\ 4/\ 4$

2744

$99^3 = 99$ का घनफल

संख्या	अविचलन	
99	–1	(आधार –100)
99	–1	(आधार –100)
99	–1	(आधार –100)

99-1-1/(-)1x(-)1x(-)1+(-)1x(-)1x(-)1+(-)1x(-)1x(-)1/-1x-1x-1

$97/\ 1 + 1 + 1/{-01}$

$97/\ 3/\ -01$

$9702/\ 100 - 1$

$9702/\ 99 = 970299$

आनुरूपेण विधि

दो अंको की संख्या का वर्ग ज्ञात करना

उदाहरण : 1

56 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

$a = 5$

$b = 6$

I	II	III
$(5)^2$	$5 \times 6 = 30$	$(6)^2$
	$+30$	
25	60	36
$25 + 6$		36

3136

उदाहरण : 2

41 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

$a = 4$

$b = 1$

I	II	III	
$(4)^2$	$4 \times 1 = 04$	$(1)^2$	प्रथम चरण
	$+04$		द्वितीय चरण
16	08	01	
16		81	

1681

नियम :

(1) इस विधि द्वारा दो अंको की किसी भी संख्याा का वर्ग किया जा सकता है।

(2) दहाई अंक को '' a'' तथा इकाई अंक को ''b'' माना जा सकता है।

(3) उत्तर के लिऐ तीन खण्ड बनाये जाते हैं

(4) प्रथम खण्ड (1) a^2

द्वितीय खण्ड (2) $a \times b$

तृतीय खण्ड (3) b^2

घनफल :–

नियम :–) इस विधि द्वारा दो अंको की किसी भी संख्याा का घनफल किया जा सकता है।

(2) दहाई अंक को '' a'' तथा इकाई अंक को ''b'' माना जा सकता है।

(3) उत्तर के लिऐ चार खण्ड बनाये जाते हैं

(4) प्रथम खण्ड a^3 तथा चर्तुथ खण्ड में b^3लिखा जाता है।

(5) द्वितीय खण्ड a^2b तथा तृतीय खण्ड में b^2a

(6) द्वितीय एवं तृतीय खण्ड में प्राप्त गुणनफल का दुगुना उसी खण्ड में जोडते है।

(7) अन्त में प्रत्येक खण्ड में एक अंक रखते हुऐ अभीष्ट घनफल प्राप्त करते है।

अभ्यास 10 से 99 तक की कोई भी संख्या लेकर उसका घनफल ज्ञात करें एवं सामान्य गुणा कर उत्तर की जॉच करें।

प्रयास करें			
(1) 14	(2) 23	(3) 37	(4) 42

I	II	III	IV
$(\text{दहाई})^3$	$(\text{दहाई})^2$xईकाई+दुगुना	(दहाई)x$(\text{ईकाइ})^2$+दुगुना	$(\text{ईकाइ})^3$

प्रत्येक खण्ड में एक अंक

I	II	III	IV
a^3	a^2b	ab^2	b^3
	$+2a^2b$	$+2ab^2$	

द्वन्द्व योग विधि से वर्ग ज्ञात करनाः–

उदाहरण –1 $(134)^2$

1 का द्वन्द्व योग/ 13 का द्वन्द्व योग/ 134 का द्वन्द्व योग ।

34 का द्वन्द्व योग / 4 का द्वन्द्व योग ।

1^2/ 1 x 3 x 2 / 1 x 4 x 2 + 3^2 / 3 x 4 x 2 / 4^2

1/6/ 8 + 9 / 24/ 16

1/6/ 17/ 24/ 16

17956

उदाहरण –2 $(83)^2$

8 का द्वन्द्वयोग / 83 का द्वन्द्व योग/ 3 का द्वन्द्व योग ।

8^2 / 8 x 3 x 2 / 3^2

= 64 / 48 / 9

= 64 / 48 / 9

= 6889

संकेत–

(i) एक अंक की संख्या का द्वन्द्व योग

जैसे 5 का योग – $5^2 = 25$

(ii) दो अंकों की संख्या का द्वन्द्व योग

दोनों अंकों का गुणा X 2

जैसे – 85 का द्वन्द्व योग 8 x 5 X 2

(iii) तीन अंकों की संख्या का द्वन्द्व योग

प्रथम अंकं X तृतीय अंक X ^{2} + **द्विवितिय का वर्ग**

जैसे – 278 का द्वन्द्व योग 2 x 8 X 2 + 7^2

चार अंको कि संख्या का द्वन्द योग

योग– 2 X प्रथम अंक X चौथा अंक

+ 2 x दूसरा अंक X तीसरा अंक

जेसे 1234 का द्वन्द्व योग ।

1 x 4 x 2 + 2 x 3 x 2

नियमः–

(i) इस विधि द्वारा किसी भी संख्या का वर्ग किया जा सकता है।

(ii) इस विधि से वर्ग करते समय संख्या में अंकों के समूह बनाये जाते हैं। जैसे संख्या में तीन अंक है तो

समूह संख्या = 2 X अंकों की संख्या - 1 = 5

(iii) प्रत्येक समूह 4ℓ द्वन्द्व योग संकेत में दिये अनुसार ज्ञात कर लिखा जाता है।

(iv) प्रत्येक खण्ड में एक अंक रखते हुए शेष अंकों को अगले खण्ड में स्थानान्तरण कर जोड़ते हैं ।

प्रयास कीजिए– (1) $(2y)^2$ (2) 36^2 (2) 123^2

– बीजगणित में शीघ्र एवं शुद्ध हल करने की वैदिक गणितीय संभावनाएॅ छिपी होती है।

– कक्षा 10 के बोर्ड परीक्षा पैटर्न को ध्यान में रखते हुए बीजगणित का एक अंक का प्रश्न आता है, जिसका विस्तृत विवरण दिया गया है ।

परावर्त्ययोजयेत

प्रथम विधि– पक्षांतरण तथा समायोजन ।

(i) a x + b = Cx + d को मानक रूप में मानें तो ।

$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

उाहरण–

$$3x + 2 = 4x + 5$$

$$x = \frac{5-2}{3-4}$$

$$x = \frac{2}{-1}$$

$$x = 3$$

प्रयास करें–

(i) $5x + 4 = 3x + 8$ (ii) $2x + 3 = x + 7$

(iii) $3x + 1 = 5x - 4$ (ii) $3x + 2 = x + 8$

यदि $(x + a)(x + b) = (x + c)(x + d)$ मानक रूप हो तो ।

$$x = \frac{cd-ab}{a6b-c-d}$$ होगा ।

उदाहरण–

$(x + 2)(x + 3) = (x + 4)(x + 5)$ में ।

a = 2, b = 3, C = 4, d = 5 है ।

अतः

$$\frac{cd - ab}{a6b - c - d}$$

$$= \frac{4 \times 5 - 2 \times 3}{2 + 3 - 4 - 5}$$

$$= \frac{20 - 6}{5 - 4 - 5}$$

या $\frac{14}{-4}$

- $\frac{7}{-2}$

या -3.5

प्रयास करें–

(i) (x + 1) (x + 2) = (x + 3) (x + 5) (ii) (x + 1) (x + 2) = (x-3) (x-5)

(ii) (x + 3) (x + 4) = (x + 9) (x + 7) (iv) (x - 3) (x + 2) = (x+ 3) (x+ 5)

विधि–

समीकरण का मानक रूप इस प्रकार है–

$\frac{p}{ax+b} = \frac{q}{ax+d}$ हो तो $\frac{ax+b}{p} = \frac{cx+d}{q}$

उदाहरण–3

$$\frac{4}{2x+3} = \frac{5}{3x+4}$$

में P = 4, q = 5 a = 2, b = 3, C= 3, d= 4

रखने पर

$$x = \frac{dp - bq}{aq - cp}$$

$$= \frac{4 \times 4 - 3 \times 5}{2 \times 5 - 3 \times 4}$$

$$= \frac{16 - 15}{10 - 12}$$

$$= \frac{1}{-2}$$

या $-\frac{1}{2}$

प्रयास करें–

(i) $\frac{1}{x+3} = \frac{3}{3x+2}$ (ii) $\frac{3}{2x+4} = \frac{4}{3x+7}$

(iii) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+5}$ (ii) $\frac{2}{3x+4} = \frac{2}{x+6}$

सूत्र–शून्य साम्य समुच्चयेः–

'समुच्चय परस्पर समान होने पर शून्य होता है।

(1) यदि समीकरण के प्रत्येक पद X में एक सर्वनिष्ठ खण्ड है ।

उदाहरणः– $4x + 7x = 3x + 5x$ सभी में x है।

अतः $x = 0$

उदाहरण– $2(x + 1) = 3(x + 1)$ में प्रत्येक खण्ड में $(x + 1)$

मैं एक सर्वनिष्ठ खण्ड है ।

अतः $x + 1 = 0$

$x = -1$

प्रयास करेंः– $4(x + 2) + 3(x + 2) = 2(x+2)$

2. एक घातीय समीकरण के दोनों पक्षों में स्वतंत्र पद अर्थात् अचर पद समान हो तो चर का मान शून्य होता है ।

उदाहरण– $(x + 4) + (2x+ 5) = 2(x + 3) + 3$

वाम पक्ष के स्वतंत्र $4 + 5 = 9$

दक्षिण पद के स्वतंत्र पद = 6 + 3 = 9 दोनों पर समान है। अतः $x = 0$

प्रयास करें–

(i) $(2x+ 7) + 3x + 4 = x + 8 + 2x + 3$

3. दोनों भिन्नों के अंश परस्पर समान हो तो दरों का योग शून्य के बराबर रखते हैं ।

उदाहरण– $\frac{2}{2x+4} = \frac{3}{x+5} = 0$

$= \quad 2x + 4+ x + 5 = 0$

$= \quad 3x + 9 = 0$

$= \quad x = \frac{-9}{3}$

$= \quad x = -3$

प्रयास $\frac{2}{3x+4} + \frac{2}{4x+3} = 0$

4. यदि समीकरण के दोनों पक्षों के अंशों का योग तथा उसके दोनों हरों का योग परस्पर समान हो या दोनों योग एक निश्चित अनुपात में हो तो किसी योग को शून्य के समान रखने पर समीकरण का हल एक मान मान ज्ञात होता है ।

$$\frac{2x+4}{3x+5} = \frac{3x+2}{2x+1}$$

अंशों का योग – $2x + 4 + 3x + 2 = 5x + 6$

हरों का योग – $3x + 5 + 2x + 1 = 5x + 6$

दोनों योग समान है–

अतः $5x + 6 = 0$

$x = -6$

$x = \frac{5}{6}$

प्रयास करें– (i) $\frac{2x+2}{3x+7} = \frac{3x+6}{2x+1}$ (ii) $\frac{x+3}{2x+5} = \frac{3x+1}{2x-3}$

यदि समीकरण के एक पक्ष को अंश व हर का अन्तर दूसरे पक्ष के अंश व हर के अन्तर के समान हो या दोनों अन्तर एक निश्चित अनुपात में से तो किसी भी अन्तर को शून्य के समान रखने पर चर राशि का एक मान ज्ञात होता है ।

उदाहरण– $\frac{2x+2}{x+5} = \frac{3x+6}{2x+3}$

वाम पक्ष के अंश व हर में अन्तर $2x + 8 - x - 5 = x + 3$

दक्षिण पक्ष के अंश व हर में अन्तर $3x + 6 - 2x - 3 = x + 3$

दोनों समान है अतः $x + 3 = 0$

$x = -3$

प्रयास कीजिए – (i) $\frac{3x+5}{2x+1} = \frac{5x+7}{4x+7}$

(ii) $\frac{2x+9}{x+4} = \frac{3x+7}{2x+2}$

(iii) $\frac{5x+7}{3x+4} = \frac{4x+9}{2x+6}$

vi. यदि किसी समीकरण के प्रत्येक पक्ष में दो पद हो तथा पद का प्रत्येक अंश परस्पर समान हो और वाम पक्ष के हरों का योग, दक्षिण पक्ष के हरों के योग के समान हो तो इस योग को शून्य के बराबर रखने पर चर राशि का मान प्राप्त होता है ।

$$= \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6}$$

वाम पक्ष के हरों का योग– $x + 3 + x + 4 = 2x + 7$

दक्षिण पक्ष के हरों का योग– $x + 1 + x + 6 = 2x + 7$

दोनों योग समान है। अतः $2x + 7 = 0$

$x = \frac{-7}{2}$

प्रयास कीजिए–

(i) $$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}$$

(ii) $$\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+6}$$

भाज्य = भाजक X भागफल + शेषफल

याद रखने हेतु Trick

a=bq+r (ए बालक क्यो रोता है)

अध्याय – 2
वास्तविक संख्याएँ

प्रमेय :- यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका

a = bq+r जहा a≤ $r < b$ a ओर b दो धनात्मक पूर्णांक है । व q व r अद्‌वितिय पूर्ण संख्याए है ।

भा भाजक भागफ शेषफल

Note :- शेषफल भाजक के बराबर व बड़ा नहीं होना चाहिए ।

भागफल

भाजक) भाज्य (

शेषफल

b) a (q

r

HCF उभयनिष्ट अभाजय गुनखंड की सबसे छोटी घात

Note :- बड़ी संख्या मे छोटी संख्या का भाग देना है।

1: 81 और 237 का महत्तम समापवर्तक (HCF) यूक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग कर ज्ञात कीजिए।

81 | 237 | 2
162
75 | 81 | 1
75
6 | 75 | 12
72
HCF=3 | 6 | 2
6
0=शेषफल

]

यूक्लिड विभाजन विधि द्‌वारा

A=bq+r

237 = 81x2+75

81 = 75x1+6

75 = 6x12+3

6 = 3x2+0

HCF = अंतिम भाजक

HCF = 3

अभाज्य गुणनखंड विधि

अभाज्य संख्याए 2,3,5,7,11,13 आदि

भाजकता के नियम -

1) 2 से भाज्यता के नियम - ईकाई के स्थान पर सम संख्या (0,2,4,6,8) आदि आए तो उस सख्या मे 2 का भाग देना है

2) 3 से भाज्यता के नियम - संख्या के अंको का योग मे 3 का भाग जाता है तो संख्या 3 से भाज्य है

3) 5 से भाज्यता के नियम - ईकाई का अंक 0 या 5 होने पर 5 का भाग जाएगा

Q 2 अभाज्य गुणनखंड विधि द्‌वारा HCF व LCM ज्ञात करो

i) 24,15 ओर 36

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

3	15
5	5
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$24 = 2x2x2x(3) = 2^3x3^1$

$15 = (3)x5 = 5^1x3^1$

$36 = 2x2x3x(3) = 2^2x3^2$

HCF = 3

$LCM = 2^3x3^2x5^1$

= 2x2x2x3x3x5

= 360

ल0स0 X म0स0 = पहली संख्या X दसरी संख्या

HCF X LCM = पहली संख्या X दूसरी संख्या

4 x 9696 = 96 x 404

38784 = 38784

Q 3 युग्मो का महत्तम समापवर्तक (HCF) व (LCM) ज्ञात करो तथा सत्यापित करो की HCF X LCM = पूर्णांकों का गुणनफल

हल :- 96 ओर 404 का

2	96
2	48
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	404
2	202
	101
	1

$96 = 2x2x2x2x2x3 = 2^5x3^1$

$404 = 2x2x101 = 2^2x101$

$HCF = 2^2 = 4$

$LCM = 2^5x\ 3^1x\ 101$

= 2x2x2x2x2x3x101

= 9696

Note : उत्तर की जांच

HCF का भाग सभी संख्याओ मे पूरा पूरा जाता है।

LCM मे सभी संख्याओ का भाग पूरा पूरा जाता है।

Q 4 HCF (90, 144) = 18 हो तो LCM (90, 144) ज्ञात करो

HCF X LCM = पहली संख्या X दूसरी संख्या

LCM X 18 = 90 x 144

$LCM = 90X\frac{144}{18}$

LCM = 720

Q 5 सिद्ध करो कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

मान लें कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$

जहा a व b सहअभाज्य संख्याएँ है अर्थात a,b मे कोई उभयनिष्ट गुणनखंड नहीं है।

$$\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$$

अपरिमे परिमेय

जो की विरोधाभास है। अतः $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Q 6 सिद्ध करो की $6+\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।

हल :- माना $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है

चूंकि $6+\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$

जहा *a* व *b* सहअभाज्य संख्याएँ है।

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6$$

$$\sqrt{2} = \frac{a-6b}{b}$$

अपरिमे

परिमेय

जो की विरोधाभास है

अत: $6+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Q 7 सिद्ध करो की $\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।

हल :- माना $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है

चूंकि $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$

जहा *a* व *b* सहअभाज्य संख्याएँ है अर्थात a,b मे कोई उभयनिष्ट गुणनखंड नहीं है।

वर्ग करने पर

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2 \qquad - (1)$$

चूंकि $2b^2$, 2 से विभाज्य है अत: a^2 भी 2 से विभाज्य होगा

माना a = 2c -- (2) जहा c एक पूर्णांक है।

सामी. (1) व (2) से

$2b^2 = (2c)^2$

$2b^2 = 4c^2$

$b^2=2c^2$

चूंकि $2c^2$, 2 से विभाज्य है अत: b^2 भी 2 से विभाज्य होगा

अत: a व b का उभयनिष्ट गुणनखंड 2 है जो की हमारे कथन का विरोधाभास है।

अत: $\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।

सांत व असांत प्रसार की पहचान --

a) ½ = 0.5 सांत प्रसार

b) $\frac{1}{3} = 0.333\ ...$ असांत प्रसार

c) ¼ = $\frac{1}{2x2}$= 0.25 सांत प्रसार

d) $\frac{1}{5} = 0.2$ सांत प्रसार

e) $\frac{1}{6} = \frac{1}{2x3} = 0.1666...$ असांत प्रसार

f) $\frac{1}{7} = 0.142857142857...$ असांत प्रसार

g) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2x2x2} = 0.125$ सांत प्रसार

h) $\frac{1}{9} = \frac{1}{3x3} = 0.1111...$ असांत प्रसार

i) $\frac{1}{10} = \frac{1}{2x5} = 0.1$ सांत प्रसार

Note - यदि परिमेय संख्या का हर $2^n x 5^m$ के रूप का है तो दशमलव प्रसार सांत होगा अन्यथा प्रसार असांत होगा।

- जिन परिमेय संख्याओ का दशमलव प्रसार सांत होता है उनके हर $2^n x 5^m$ के रूप मे लिखे जा सकते है जहा m व n कोई ऋणोत्तर पूर्णांक है।

Q 8 लम्बी विभाजन विधि के बिना बताईये कि निम्न परिमेय संख्याओ के दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती है

i) $\frac{17}{8}$ ii) $\frac{64}{455}$ iii) $\frac{125}{441}$

हल i) $\frac{17}{8}$ = $17/2^3 x 5^0$

यहा परिमेय संख्याओ का हर 8 , $2^3 x 5^0$ है जो $2^n x 5^m$ के रूप का है अतः $\frac{17}{8}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

ii) $\frac{64}{455} = \frac{64}{5 \text{ X } 7 \; X \; 13}$ यहा हर 455 , जो $2^n x 5^m$ के रूप का नहीं है अतः $\frac{64}{455}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

iii) $\frac{125}{441} = 5^3/3^2 x 7^2$ यहा हर $2^n x 5^m$ के रूप का नहीं है अतः $\frac{125}{441}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

अध्याय – 3
बहुपद

इस अध्याय में से 3 अंक प्रश्न निम्नानुसार संभावित हैः–

1.द्विघात बहुपद के शून्यकों एवं गुणांकों में सम्बन्ध पर आधारित है। 2.विभाजन एल्गोरिथम पर आधारित। 3.द्विघात समीकरण हल करना। 4.LCM तथा HCF पर आधारित।

बहुपद (एक से अधिक पद)
- रैखिक बहुपद $\rightarrow 2\underline{x}-3,\ \sqrt{3}\underline{x}+5$ (चर की एक घात)
- द्विघात बहुपद $\rightarrow \underline{x}^2-9,\ \underline{y}^2-2y+1$ (चर की दो घात)
- त्रिघात बहुपद $\rightarrow 3\underline{x}^3-2x^2+2x-1$ (चर की तीन घात)

बहुपद की जितनी अधिकतम घात होगी बहुपद में उतने ही शून्यक होंगे।

शून्यक – चर का वह मान जो बहुपद को शून्य कर दें।

उदाहरण – $f(x)=2x^2-8x+6$ में $x=1$ रखने पर

$$f(1)=2(1)^2-8(1)+6$$
$$=2-8+6$$
$$=8-8$$
$$=0$$

इसी प्रकार $x=3$ रखने पर

$$f(3)=2(3)^2-8(3)+6$$
$$=2(9)-24+6$$
$$=18-24+6$$
$$=24-24$$
$$=0$$

$\because x=1$ तथा $x=3$ पर बहुपद के मान 0 प्राप्त होते है।

अतः 1 और 3 द्विघात बहुपद के शून्यक होंगे।

द्विघात बहुपद में अधिकतम दो शून्यक होंगे।

द्विघात बहुपद का मानक रूप $f(x)=ax^2+bx+c$

$a=x^2$ का गुणांक, $b=x$ का गुणांक, $C=$ अचर पद

बहुपद के शून्यक ज्ञात करना एवं शून्यकों एवं गुणांकों में सम्बन्ध की सत्यता की जाँच करना–

यदि द्विघात बहुपद के शून्यकों को α (एल्फा) तथा β (बीटा) से दर्शाया जाय तो –

शून्यकों का योग $\alpha\times\beta=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=-\dfrac{b}{a}$

तथा शून्यकों का गुणनफल $\alpha\times\beta=\dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=\dfrac{c}{a}$

उदाहरण – द्विघात बहुपद $x^2-2x-8=0$ के शून्यक ज्ञात कीजिये और शून्यकों एवं गुणांकों के बीच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिये।

माना $f(x)=x^2-2x-8=0$

$$\Rightarrow x^2-(4-2)x-8=0$$
$$\Rightarrow x^2-4x+2x-8=0$$
$$\Rightarrow x(x-4)+2(x-4)=0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x+2)=0$$

यहाँ	$a=1, b=-2, c=-8$
	$a\times c=1X-8=-8$
	$8=1\times 8$ सम्भव नहीं
	$[\because 1+8=9]\ [8-1=7]$
	$8=2\times 4$ (संभव)
	$\because -4+2=-2\ =b$

या तो $x-4=0\Rightarrow x=4$

या $x+2=0\Rightarrow x=-2$

अतः बहुपद के शून्यक 4 और –2 होंगे।

सत्यता की जाँच

माना $\alpha=4$ और $\beta=-2$

तब शून्यकों का योग $\alpha+\beta=4+(-2)=4-2=2$

शून्यकों का योग $=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{-(-2)}{1}=\dfrac{2}{1}=2$ दोनों बराबर है।

इसी प्रकार शून्यकों का गुणफल $\alpha \times \beta = 4 \times -2 = -8$

तथा शून्यकों का गुणनफल $= \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-8}{1} = -8$ दोनों बराबर है।

अतः शून्यकों एवं गुणांकों में सम्बन्ध सत्य है।

शून्यकों का योग एवं गुणनफल दिये जाने पर बहुपद ज्ञात करना –

(इस प्रकार के प्रश्न हल करने के लिये सूत्र का प्रयोग सुविधाजनक रहता है।)

माना α तथा β द्विघात बहुपद $f(x) = ax^2 + bx + c$ के शून्यक हैं।

तब $(x-\alpha)$ तथा $(x-\beta)$ बहुपद के गुणनखण्ड होंगे।

तब स्थिरांक K के लिये $f(x) = K(x-\alpha)(x-\beta)$

अर्थात् $f(x) = K[x^2 - (\alpha+\beta)\text{x} + \alpha\beta]$

उदाहरण : एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमश $\frac{1}{4}$ और –1 है।

माना द्विघात बहुपद $f(x) = ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β है।

तब प्रश्नानुसार $\alpha + \beta = \dfrac{1}{4}$ तथा $\alpha\beta = -1$

$$f(x) = K[x^2 - (\alpha+\beta)\text{x} + \alpha\beta]$$

$$K\left[x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)\text{x} + (-1)\right]$$

$$K\left[x^2 - \frac{x}{4} - 1\right]$$

$$\boxed{\left[x^2 - \frac{x}{4} - 1\right]}$$

$$K\left[\frac{4x^2 - x - 4}{4}\right]$$

$$= \frac{K}{4}\left[4x^2 - x - 4\right]$$

अतः अभीष्ट बहुपद $4x^2 - x - 4$ होगा।

विभाजन एल्गोरिथ्म –

भाजक → 5) 8 (1 ← भाज्य

भागफल

5

3 ← शेषफल

8 = 5 x 1 + 3

भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

बहुपद $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ को बहुपद $g(x) = x + 2$ से विभाजन एल्गोरिथ्म विधि से विभाजित करना।

$$
\begin{array}{r|l}
x+2) & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad (x^2 - 8x + 27 \\
 & x^3 + 2x^2 \\
\hline
 & -8x^2 + 11x \\
 & -8x^2 - 16x \\
\hline
 & 27x - 6 \\
 & 27x + 54 \\
\hline
 & -60
\end{array}
$$

इसे निम्न रूप में भी दर्शाया r(x) जा सकता है।

$f(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$

क्रियाविधि

(1) $\dfrac{x^3}{x} = x^2$

$$(x+2)x^2 = x^3 + 2x^2$$

(2) $\frac{-8x^2}{x} = -8x$

$(x+2)x - 8x = -8x^2 - 16x$

(3) $\frac{27x}{x} = 27$

$(x+2) \times 27 = 27x + 54$

बहुपद $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ को $g(x) = x^2 + 1 - x$ से भाग देने के लिये $p(x) = x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ एवं $g(x) = x^2 - x + 1$ के रूप में लिखकर भाग क्रिया की जा सकती है।

विशेष –

(1) भाग क्रिया करने से पूर्व बहुपद की (भाज्य एवं भाजक को) चर राशि को घटती हुई घातों के क्रम में लिखते हैं अर्थात् बहुपद को मानक रूप में लिखते हैं।

(2) भाग क्रिया में शेषफल 0 प्राप्त होने पर भाजक $g(x)$ बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है।

द्विघात समीकरण – यदि कोई द्विघात बहुपद $f(x) = ax^2 + bx + c$ हो और उनका मान 0 के बराबर हो तो वह द्विघात समीकरण कहलाता है।

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = 0$

विशेष : द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने की प्रक्रिया को ही उस समीकरण को हल करना कहते हैं।

अर्थात् $ax^2 + bx + c = 0$ (यदि द्विघात समीकरण का मानक रूप कहलाता है)

द्विघत समीकरण के मूल – द्विघात समीकरण की अधिकतम घातांक 2 होती है। अतः इसके अधिकतम दो मूल हो सकते है।

मूलों की प्रकृति –

(1) $b^2 - 4ac > 0$ दो असमान एवं वास्तविक मूल

(2) $b^2 - 4ac = 0$ दो समान एवं वास्तविक मूल

(3) $b^2 - 4ac < 0$ कोई वास्तविक मूल नहीं होता (काल्पनिक मूल)

द्विघात समीकरण हल करने की विधियाँ–

(1) गुणनखण्ड विधि

(2) पूर्ण वर्ग बनाकर

(3) श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र द्वारा

इन विधियों में श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र विधि सबसे सुगम विधि है।

श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र–

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

उदाहरण – निम्न द्विघात समीकरण के मूल, यदि उनका अस्तित्व हो, तो श्रीधर आचार्य विधि द्वारा द्विघाती सूत्र का उपयोग करके ज्ञात कीजिये।

$9x^2 + 7x - 2 = 0$

मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 9, b = 7, c = -2$

$D = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4(9)(-2)$

$= 49 + 72$

$= 121$

$\because b^2 - 4ac > 0$ $\therefore$ समीकरण के दो असमान एवं वास्तविक मूल होंगे।

द्विघाती सूत्र – $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ में मान रखने पर

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{2 \times 9}$

$x = \frac{-7 \pm 11}{18}$

+ चिह्न लेने पर $x = \frac{-7 + 11}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

– चिह्न लेने पर $x = \frac{-7 - 11}{18} = \frac{-18}{18} = -1$

अतः समीकरण के मूल $\frac{2}{9}$ एवं –1 होंगे।

LCM एवं HCF (लघुत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक)
LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) – प्रत्येक प्रकार के गुणनखण्ड में अधिकतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल
HCF (महत्तम समापवर्तक) – उभयनिष्ठ गुणनखण्डों में न्यूनतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल
LCM एवं HCF में सम्बन्ध –

LCM x HCF = प्रथम व्यंजक x द्वितीय व्यंजक
(1) (2) (3) (4)

जहाँ (1) व (2) साथी है, (3) व (4) साथी है।

उदाहरण – निम्न व्यंजकों का LCM तथा HCF ज्ञात कीजिये।

$$x^2-4x+3,\quad x^2-5x+6$$

माना $U(x)=x^2-4x+3$

$$=x^2-3x-x+3$$
$$=x(x-3)-1(x-3)$$
$$=(x-3)(x-1)$$

तथा $V(x)=x^2-5x+6$

$$=x^2-3x-2x+6$$
$$=x(x-3)-2(x-3)$$
$$=(x-3)(x-2)$$

LCM = प्रत्येक प्रकार के गुणनखण्ड में अधिकतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल
$(x-1)(x-2)(x-3)$

अतः $\text{LCM}=(x-1)(x-2)(x-3)$
$$=(x-3)$$

अतः $HCF=(x-3)$

विशेष : द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने की प्रक्रिया को ही उस समीकरण को हल करना कहते हैं।

LCM एवं HCF (लघुत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक)
LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) – प्रत्येक प्रकार के गुणनखण्ड में अधिकतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल
HCF (महत्तम समापवर्तक) – उभयनिष्ठ गुणनखण्डों में न्यूनतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल
LCM एवं HCF में सम्बन्ध –

LCM x HCF = प्रथम व्यंजक x द्वितीय व्यंजक
(1) (2) (3) (4)

जहाँ (1) व (2) साथी है, (3) व (4) साथी है।

उदाहरण – निम्न व्यंजकों का LCM तथा HCF ज्ञात कीजिये।

$$x^2-4x+3,\qquad x^2-5x+6$$

प्रथम व्यंजक $=x^2-4x+3$

$$=x^2-3x-x+3$$
$$=x(x-3)-1(x-3)$$
$$=(x-3)(x-1)$$

$x^2-4x+3,$ $\boxed{3 \quad 1}$

द्वितीय व्यंजक $=x^2-5x+6$

$$=x^2-3x-2x+6$$
$$=x(x-3)-2(x-3)$$
$$=(x-3)(x-2)$$

$=x^2-5x+6$ $\boxed{3 \quad 2}$

HCF = दोनों व्यंजकों में उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $(x-3)$ है

$$\therefore HCF=(x-3)$$

LCM = प्रत्येक प्रकार के गुणनखण्ड में अधिकतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल
$(x-1),(x-2)$ एवं $(x-3)$ हैं।
$\text{LCM}=(x-1)(x-2)(x-3)$

उदाहरण : दो व्यंजकों का गुणनफल $(x-7)(x^2+8x+12)$ है। यदि इन व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक $(HCF),(x+6)$ हो तो इनका (LCM) लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिये।

LCM x HCF प्रथम व्यंजक x द्वितीय व्यंजक (व्यंजकों का गुणनफल)

$$LCM = \frac{\text{प्रथम व्यंजकों} \times \text{द्वितीय व्यंजक}}{HCF}$$

$$\text{LCM} = \frac{(x-7)(x^2+8x+12)}{(x+6)}$$

$$\text{LCM} = \frac{(x-7)(x^2+6x+2x+12)}{(x+6)}$$

$$\text{LCM} = \frac{(x-7)[x(x+6)+2(x+6)]}{(x+6)}$$

$$\text{LCM} = \frac{(x-7)\cancel{(x+6)}(x+2)}{\cancel{(x+6)}}$$

$$LCM = (x-7)(x+2)$$

$$LCM = x^2 - 7x + 2x - 14$$

$$LCM = x^2 - 5x - 14$$

अतः $LCM = x^2 - 5x - 14$

विशेष –
जो ज्ञात करना है उसके साथी का भाग दूसरे पक्ष में लगेगा।

$x^2 + 8x + 12$

12	1
$\boxed{6}$	$\boxed{2}$
4	3
3	4
2	6

$$\begin{array}{r} x-7 \\ x+2 \\ \hline +2x-14 \\ x^2-7x \\ \hline x^2-5x-14 \end{array}$$

अध्याय – 4

दो चरों वाले रैखिक समीकरण एवं असमिकाएं

अंक भार – 6

भाग (A) दो चरों वाले रैखिक

भाग (B) रैखिक समीकरण युग्म का आलेखीय हल

भाग (C) दो चरों वाली रैखिक असमिकाएं

दो चरों वाले रेखीय समीकरण

$2x+3y+4=0$

$ax+by+c=0$ (मानक समीकरण)

दोनों समीकरणों की तुलना करने पर

यहाँ a, x का गुणांक b, y का गुणांक $c,$ अचर पद है।

$a=2, \quad b=3, \quad c=4$

इसी तरह $\quad 3x+5y-6=0$

$\quad ax+by+c=0 \quad \therefore a=3, \quad b=5, \quad c=-6$

यदि दो समीकरण एक साथ दिए गए हैं, तो

$a_1x+b_1y+c_1=0$ (प्रथम मानक समीकरण)

$a_2x+b_2y+c_2=0$ (द्वितीय मानक समीकरण)

यदि दो समीकरण दी गई है तो

$5x+6y-7=0$ तथा $8x+7y-3=0$

$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad a_2x+b_2y+c_2=0$

$a_1=5, \quad b_1=6 \quad c_1=-7 \qquad a_2=8, \quad b_2=7 \quad c_2=-3$

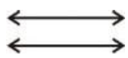
भाग (A)

यदि दो चरों वाले रैखिक समीकरण दिए गए है।

$a_1x+b_1y+c_1=0$

तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$

दोनों रेखाएं तीन प्रकार से प्रदर्शित हो सकती है। (प्रकृति)

क्र. सं.	गुणांकों की तुलना (अनुपात)	बीज गणितीय निरूपण	ग्राफीय निरूपण	उदाहरण
1.	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ युग्म संगत	अद्वितीय (एक हल होगा)	प्रतिच्छेदी रेखाएं 	$2x+3y=5$ $5x+7y=15$ $\frac{2}{5} \neq \frac{3}{7}$
2.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ युग्म आश्रित संगत	अपरिमित रूप से अनेक हल	संपाती रेखाएं 	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$ $\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} = \frac{3}{6} = \frac{-9}{-18}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
3.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ असंगत	कोई हल नहीं	समान्तर रेखाएं 	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-4}{-12}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$

सारणी बनाना (निश्चित क्रम को जानकर)

(i)

x	1	0	–1	–	–3	–4	–	–6
y	0	1	2	3	4	–	6	–

$x = 1 - y$ $y = 0$ $x = 1$	$y = 1$ $x = 0$	$y = 2$ $x = -1$

(ii) $x - y = 3$

x	$\underline{-2}$	–	0	1	2	–	4
y	–	$\underline{-1}$	2	5	8	11	–

$x = 3 + y$

यहाॅ आप देख रहे है कि x व y का मान +1 बढ रहा हैं।

$y = 0$ $x = 3$	$y = 1$ $x = 4$

(iii) $y = 3x + 2$

O	1	2	x	3	4	5	–	7		9
-3	-2	-1	y	0	1	2	3	–	5	–

यहाॅ x मे +1 व y मे +3 बढ रहा हैं।

भाग (B)

(i) अद्वितीय हल पर आधारित समीकरणों का ग्राफीय विधि से हल।

प्रश्न : समीरकणों $x - y + 1 = 0$ और $3x + 2y + 12 = 0$ का ग्राफ खींचिए। X – अक्ष और इन रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

$x - y + 1 = 0$

$x = -1 + y$

$y = 0$

$x = -1$

$3x + 2y - 12 = 0$

$3x = 12 - 2y$ (पक्षान्तरण करने पर)

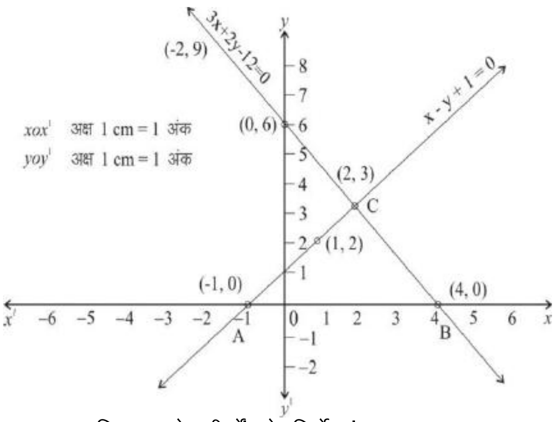
$y = 0$ रखने पर

$3x = 12$

$x = \frac{12}{3} = 4$

1	x	-1	0	1	2
1	y	0	1	2	3

-2	x	4	2	0	-2
3	y	0	3	6	9



(1) समीकरण $x - y + 1 = 0$ में $y = 0$ रखकर x का मान ज्ञात किया तथा सारणी में अंकित किया। [समी.(1)]

(2) पक्षान्तरण करने पर प्राप्त समीकरण से x का गुणांक y के आगे तथा y का गुणांक x के आगे लिखते है।

(3) पूर्व प्राप्त मानों को उन गुणांकों के साथ जोड़ने पर नए निर्देशांक प्राप्त हो जायेंगे।

त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक

A (-1, 0)

B (4, 0)

C (2, 3)

असमिका का संगत क्षेत्र ज्ञात करने की विधि :–

(i) दी गई असमिका के संगत रेखा का आलेख बनाइए।

(ii) यदि असमिका में बराबर का चिह्न साथ में है तो गहरी रेखा बनाएं।

(iii) यदि असमिका में बराबर का चिह्न नहीं है तो खण्डित रेखा (– – – – – – –) बनाएँ।

(iv) यह आलेख तल को तीन भागों में विभाजित करता है।

(1) आलेख के बांयी ओर का तल

(2) आलेख के दांयी ओर का तल

(3) आलेख पर स्थित बिन्दु

(v) उपर्युक्त हल क्षेत्र ज्ञात करने के लिए असमिका में ऐसा बिन्दु रखे जो बनाए गए आलेख पर नहीं हो।

(vi) यदि रेखा मूल बिन्दु से नहीं गुजरती है, तो मूल बिन्दु असमिका में रखे।

(vi) यदि मूल बिन्दु असमिका को सन्तुष्ट करता है तो मूल बिन्दु की ओर का क्षेत्र हल क्षेत्र होगा अन्यथा दूसरी ओर का क्षेत्र हल क्षेत्र होगा।

उदाहरण : $2x+3y\geq 3$ का समुच्चय को छांयाकित कीजिए।

हल : (i) $2x+3y\geq 3$ के संगत रेखा $2x+3y=3$ का आलेख बनाएंगे।

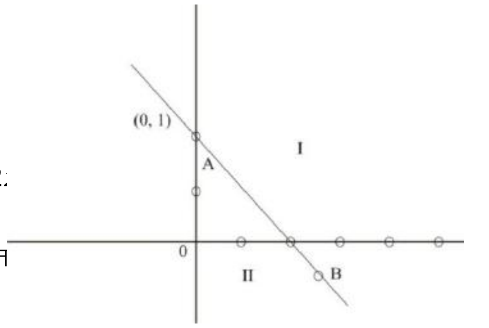
$2x+3y=3$

$3y=3-2x$

$y=\dfrac{3-2x}{3}$

x	0	3	6
y	1	-1	-3

2.



(ii) असमिका

$2(0)+3(0)\geq 3$

$0\geq 3$ जो कि असत्य है। अतः मूल बिन्दु हल क्षेत्र में न

असमिकाओं को हल करना।

$x+y>3$

दिए गए समीकरण में यदि $y=0$ है तो

$x+0>3$

$x>3$

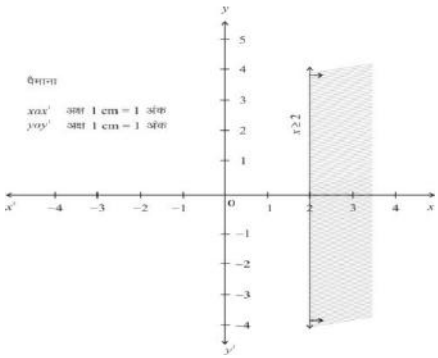
अतः दी गई समीकरण जहाँ $y=0$, $y-$ अक्ष के समान्तर एक रेखा होगी।

$x+y<2$

यदि $x=0$ है तो

$0+y<2$

अतः दी गई समीकरण जहाँ $x=0$ है $x-$ अक्ष के समान्तर एक रेखा होगी।



भाग (C)

दो चरों वाली रैखिक असमिकाएं।

असमिकाओं पर आधारित 3 तरह के ग्राफ हो सकते है।

type (i) इस प्रकार के ग्राफ x तथा y अक्षों के समान्तर बनते है।

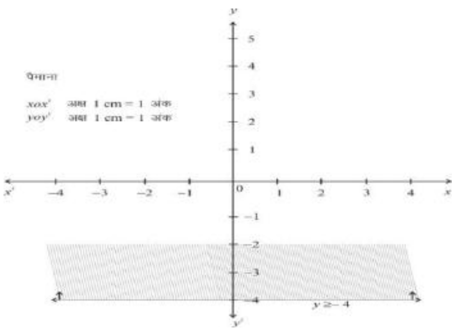
प्रश्न (1) $x\geq 2$

ग्राफ बनाते समय $x=2$ पर y अक्ष के समान्तर एक रेखा खींचनी है।

ग्राफ में x व y के स्थान पर 0 रखते है। यदि कथन सत्य है तो छांयाकित भाग मूल बिन्दु की तरफ होगा।

और यदि कथन असत्य है तो छायांकित भाग मूल बिन्दु की दिशा के विपरित होगा।

$0\geq 2$ (कथन असत्य है अतः छायांकित भाग मूल बिन्दु से विपरित दिशा में होगा)



प्रश्न (2) $y\geq -4$

$0\geq -4$

(सत्य)

$y=4$ पर जाकर अक्ष के समान्तर रेखा खींचना तथा मूल बिन्दू की तरफ छायांकित भाग होगा।

type (ii) इस प्रकार के ग्राफ रेखांक समीकरण के रूप में होते है।

(1) $2x+3y\leq 12$

इस प्रकार के समीकरणों को हल करते समय $2x+3y=12$ लेकर सारणी बनाई जाती है तथा ग्राफ खींचा जाता है।

$2x+3y=12$

$2x=12-3y$

-3		x	6	3	0
2		y	0	2	4

$y=0$

$x=6$

अब $2x+3y \le 12$ समीकरण में $x=0$ तथा $y=0$ रखते है।

$0+0 \le 12$

$0 \le 12$ (कथन सत्य है।)

अतः छायांकित भाग मूल बिन्दु की दिशा में होगा।

type (iii) मोड (Mode) पर आधारित ग्राफ को हल करना।

प्रश्न : $|x-y| \ge 1$

इस प्रकार के समीकरणों को हल करते समय दो समीकरण ली जाती है।

$x-y \ge 1$ $\qquad$ $x-y \ge 1$

संख्या तथा चिह्न दोनों समान लिए जाते है।

संख्या तथा चिह्न उलट दिए जाते है।

$\ge$ चिह्न $\le$ में बदलता है।

1 संख्या -1 में बदलती है।

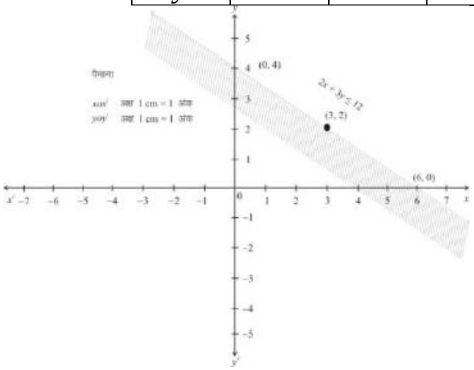
अब दोनों समीकरणों को सारणी बनाकर ग्राफ पर अंकित कर दिया जाता है।

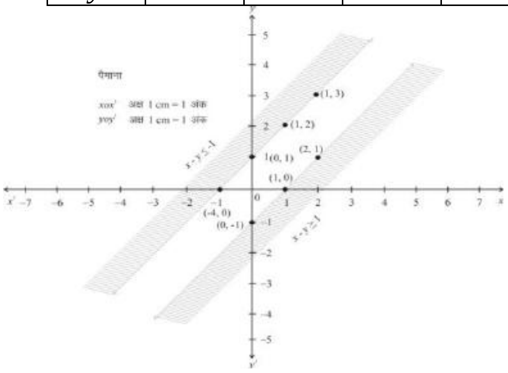
$x-y=1$

x	1	0	2
y	0	-1	1

$x-y=-1$

x	-1	0	1	2
y	0	1	2	3





$x-y \ge 1$

x तथा y की जगह 0 रखते है।

$0-0 \ge 1$

$0 \ge 1$ (असत्य)

अतः छायांकित भाग मूल बिन्दु से विपरीत दिशा में होगा।

$x-y \le 1$

$0-0 \le 1$

$0 \le -1$

(असत्य)

अतः छायांकित भाग मूल बिन्दु से विपरीत दिशा में होगा।

अध्याय – 5

समान्तर श्रेढ़ी (A.P.)

प्रश्न आयेगा अंक भार – 3

समान्तर श्रेढ़ी की पहचान –

निम्न श्रेढ़ियों को ध्यान से देखे –

1) 1, 2, 3, 4, 5, ...
2) 3, 5, 7, 9, 11, ...
3) 10, 5, 0, – 5, ...
4) – 36, – 32, – 28, – 24 ....
5) 2½, 5, 7½, 10 ....

उपरोक्त श्रेढ़ियों को देखने से पता चलता है कि इन सभी श्रेढ़ियों में पदों को अन्तर समान है (अन्तर धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है।)

जैसा कि श्रेढ़ी 1) में पदो का अन्तर

$2 – 1 = 1, \quad 3 – 2 = 1, \quad 4, - 3 = 1, \quad 5 – 4 = 1$

श्रेढ़ी 2) में पदो का अन्तर

$5 – 3 = 2, \quad 7 – 5 = 2, \quad 9 – 7 = 2, \quad 11 – 9 = 2$

श्रेढ़ी 3) में पदो का अन्तर

$5 – 10 = – 5, \quad 0 – 5 = – 5, \quad – 5 – 0 = – 5$

श्रेढ़ी 4) में पदो का अन्तर

$– 32 – (- 36) = 4, \quad - 28 (- 32) = 4, \quad – 24 – (28) = 4$

श्रेढ़ी 5) में पदो का अन्तर

$5 – 2½ = 2½, \quad 7½ – 5 = 2½, \quad 10, - 7½ = 2½$

अतः इस प्रकार की श्रेढ़ियॉ समान्तर श्रेढ़ी कहलाती है।

समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद को 'a' से बताया जाता है।

समान्तर श्रेढ़ी के पदो के अन्तर को सार्वअन्तर (d) कहते है। बढ़ती हुई श्रेढ़ी में d का मान सदैव धनात्मक व घटती हुई श्रेढ़ी में d सदैव ऋणत्मक होता है।

समान्तर श्रेढ़ी का मानक रूप –

$a, a + d, \; a + 2d \ldots\ldots\ldots\ldots, a + (n - 1) d$

उदाहरण 1– एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 4 व सार्वअन्तर 3 हो तो श्रेढ़ी के प्रथम चार पद लिखिए –

हल – प्रथम चार पद $a, a + d, \; a + 2d, \; a + 3d \ldots\ldots\ldots$

$= 4, \; 4 + 3 = 7, \; 7 + 3 = 10, \; 10 + 3 = 13$

$= 4, \; 7, \; 10, \; 13$

समान्तर श्रेढ़ी का n वॉ पद ज्ञात करना –

$a_n = a + (n – 1) d$ यहां a_n=n वॉ पद है।

उदाहरण 2– श्रेढ़ी 2, 5, 8 .... का 11 वॉ पद ज्ञात करो –

हल – दी गई श्रेढ़ी में $a = 2, \; d = 3, \; n = 11$

सूत्र $a_n = a + (n – 1) d$

$a_n = 2 + (11 – 1) \times 3$

$a_n = 2 + 10 \times 3$

$= 32$

उदाहरण 3– A.P. 21, 18, 15 .... का कौनसा पद – 81 है।

हल – दी गई श्रेढ़ी में $a = 2, \; d = – 3, \; a_n = – 81, \; n = ?$

$$a_n = a + (n – 1) d$$
$$– 81 = 21 + (n – 1) \times (- 3)$$
$$– 81 – 21 = – 3n + 3$$
$$3n = 3 + 81 + 21$$
$$3n = 105$$
$$n = \frac{105}{3} = 35$$

नोट – n का मान सदैव एक पूर्ण संख्या होगी।

उदाहरण 4– A.P. निर्धारित कीजिए जिसका तीसरा पद 5 व सातावॉ पद 9 है।

हल – श्रेढ़ी का तीसरा पद $a + 2d = 5$ ………… (i)

श्रेढ़ी का सातवॉ पद $a + 6d = 9$ ………… (ii)

समी. (i) व (ii) को घटाने पर

$$a + 6d = 9$$
$$a + 2d = 5$$
$$4d = 4 \quad \rightarrow \quad d = 1$$

d का मान (i) में रखने पर $a + 2 \times 1 = 5$

$$a = 5 - 2 = 3$$

समान्तर श्रेढ़ी 3, 4, 5, 6 ....

उदाहरण 5– श्रेढ़ी 3, 8, 11 .... 253 में अंतिम से 20 वॉ पद ज्ञात कीजिए।

हल – इस प्रकार के प्रश्नों में अंतिम पद को प्रथम पद मान ले तथा d के मान को भी चिन्ह बदले।

$a = 253$, $d = 5$ है चिन्ह बदलने पर – 5 होगा, $n = 20$

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$
$$= 253 + (20 - 1)(-5)$$
$$= 253 + 19(-5)$$
$$= 253 - 95$$
$$= 158$$

उदाहरण 6– 10 और 250 के बीच में 4 के गुणज कितने है।

हल – श्रेढ़ी 12, 16, 20 248

$a = 12$, $d = 4$ $a_n = 248$, $n = ?$

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$
$$248 - 12 + (n - 1) \times 4$$
$$248 - 12 = (n - 1) \times 4$$
$$\frac{236}{4} = n - 1$$
$$n - 1 = 59$$
$$n = 59 + 1$$
$$n = 60$$

समान्तर श्रेढ़ी के पदों का योगफल ज्ञात करना –

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)\, d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

S_n = n पदों का योग, l = श्रेढ़ी का अंतिम पद होता है।

उदाहरण 7– समान्तर श्रेढ़ी 2, 7, 12 .... के 10 पदो का योगफल ज्ञात करो।

हल – $a = 2$, $d = 5$, $n = 10$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)\, d]$$
$$= \frac{10}{2}[2 \times 2 + (10 - 1) \times 5]$$
$$= 5\,[4 + 9 \times 5)$$
$$= 5 \times 49$$
$$= 245$$

उदाहरण 8– 636 योग प्राप्त करने के लिए A.P. 9, 17, 25 .... के कितने पद लेने चाहिए ?

हल – $S_n = 636$, $a = 9$, $d = 8$, $n = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)\, d]$$

$636 = \frac{n}{2}$ [2 x 9 + (n – 1) x 8]

$636 = \frac{n}{2}$ x 2 [9 + 4n - 4]

636 = n [5 + 4n)

636 = $4n^2 + 5n$

$4n^2 + 5n – 636 = 0$

$4n^2 + 53n – 48n – 636 = 0$

n (4n + 53) – 12 (4n + 53) = 0

(n – 12) (4n + 53) = 0

n – 12 = 0	4n + 53 = 0
n = 12	$n = -\frac{53}{4}$

n केवल पूर्ण संख्या होती है।

उदाहरण 9– प्रथम 40 घन पूर्णांकों का योग ज्ञात करो जो कि 6 से विभाज्य है।

हल – श्रेणी 6, 12, 18 .... जहॉ $a = 6$, $d = 6$, $n = 40$, $S_n = ?$

$S_n = \frac{n}{2}$ [2a + (n – 1) d]

$= \frac{40}{2}$ [2 x 6 + (40 – 1) x 6]

= 20 [12 + 39 x 6)

= 20 x 246

= 4920

प्रथम n प्राकृत सख्याओं का योग ज्ञात करना – $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

उदाहरण 10 – 1 से 100 तक की प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{100 \times (100+1)}{2}$

= 50 x 101

= 5050

उदाहरण 11 – 101 से 200 तक की प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करो –

हल – 1 से 100 तक की संख्याओं का योग

$S_{100} = \frac{100 \times 101}{2}$

= 50 x 101

= 5050

1 से 200 तक की प्राकृत संख्याओं का योग

$S_{200} = \frac{200 \times 201}{2}$

= 100 x 201

= 20100

101 से 200 तक की संख्याओं का योग

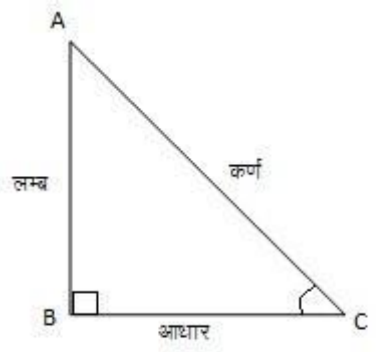
$= S_{200} - S_{100}$

= 20100 – 5050

= 15050

___

अध्याय–6
त्रिकोणमितिय अनुपात



i. समकोण त्रिभुज में सबसे लम्बी भुजा कर्ण होती है।
ii. त्रिकोणभितीय अनुपात

1. $\sin\theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$ 4. $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$

2. $\cos\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$ 5. $\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

3. $\tan\theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$ 6. $\cot\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

निर्देश (1) θ के सम्मुख भुजा लम्ब व कर्ण के अतिरिक्त शेष भुजा आधार होगी।
जैसे $\underline{/}\ c = \theta$ तो AB व आधार BC होगी। $\sin C = \frac{AB}{AC}$ तथा $\sin A = \frac{BC}{AC}$
(/C के सम्मुख भुजा AB लम्ब आधार BC होगा।) (/A के सम्मुख भुजा BC लम्ब आधार AB होगा।)

विशेष i. $cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}$ या $sin\theta = \frac{1}{cosec\theta}$

अतः $\boxed{sin\ \theta\ cosec\ \theta = 1}$

ii. $cos\ \theta = \frac{1}{sec\ \theta}$ या $sec\ \theta = \frac{1}{cos\ \theta}$

अतः $\boxed{sec\ \theta\ cosec\ \theta = 1}$

iii. $ten\ \theta = \frac{1}{cot\ \theta}$ या $cot\ \theta = \frac{1}{tan\ \theta}$

अतः $\boxed{tan\ \theta\ cot\ \theta = 1}$

iv. $tan\ \theta = \frac{\sin\theta}{cos\ \theta}$

v. $cot\ \theta = \frac{\cos\theta}{sin\ \theta}$

<u>न्यून कोणों के त्रिकोणभितीय अनुपात</u> :–

इसमें $0°$ से $90°$ के कोणों के त्रिकोणभितीय अनुपातों का अध्ययन करेगें।
त्रिकोणभिति के $0°$ से $90°$ के अनुपातों का मान ज्ञात करने हेतु सरल विधि –
1. सर्वप्रथम एक कॉलम में त्रिकोणभितीय अपुनात तथा ऊपर प्रथम पंक्ति में $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ चित्रानुसार लिखेंगे।

कोण / अनुपात	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\text{coses}\,\theta$					

2. सारणी के ऊपर 0, 1, 2, 3, 4 लिखकर 4 से विभाजित कर भागफल लिखेंगे।

$\frac{0}{4} = 0,\ \frac{1}{4} = \frac{1}{4},\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ \frac{3}{4} = \frac{3}{4},\ \frac{4}{4} = 1$

कोण / अनुपात	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$

3. $\sin\theta$ के सामने वाली पंक्ति में सारणी के ऊपर लिखें।

मानों (भागफल) 0 का वर्गमूल $\sqrt{0} = 0$, $\frac{1}{4}$ का वर्गमूल $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, का वर्गमूल $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\frac{3}{4}$ का वर्गमूल $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 1 का वर्गमूल $\sqrt{1} = 1$ लिखेंगे।

	$\sqrt{0}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{1}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

4. $\cos\theta$ के सामने वाली पंक्ति में $\sin\theta$ वाली पंक्ति में लिखें का क्रम परिवर्तित कर (अन्तिम से प्रथम की ओर) चित्र में दिखायें अनुसार लिखेंगे –

$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

5. $\tan\theta$ के सामने वाली पंक्ति में $\sin\theta$ के मानों को $\cos\theta$ के मानों से विभाजित कर लिखेंगे।

$$\frac{0}{1} = 0, \quad \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2}, = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = \sqrt{3}, \frac{1}{0} = \infty \text{ (अपरिभाषित)}$$

$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞ (अपरिभाषित)

Note – किसी संख्या में शून्य से भाग देने पर भागफल अपरिभाषित रहता है।

6. $\cot\theta$ के सामने वाली पंक्ति में $\tan\theta$ वाली पंक्ति में लिखे मानों का क्रम परिवर्तन कर चित्र में दिखायें अनुसार लिखेंगे।

$\cot\theta$	∞ (अपरिभाषित)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

7. $\sec\theta$ एवं $\text{cosec}\,\theta$ के सामने वाली पंक्तियों में क्रमशः $\cos\theta$ व $\sin\theta$ के मानों का व्युत्क्रम कर चित्र में दिखायें अुनसार लिखें –

$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞ (अपरिभाषित)
$\text{cosec}\,\theta$	∞ (अपरिभाषित)	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2

या $\text{cosec}\,\theta$ वाली पंक्ति में $\sec\theta$ के मानों का परिवर्तन कर लिखेंगे।

इस प्रकार सारणी का निर्माण होगा –

कोण / अनुपात	$0°$ $0°$	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{2}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞ (अपरिभाषित)
$\cot\theta$	∞ (अपरिभाषित)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞ (अपरिभाषित)
$\text{coses}\,\theta$	∞ (अपरिभाषित)	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

<u>**उदाहरण –1**</u> $tan^2 60° + 3\,cos^2 30°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल – (सारणी से त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान रखने पर)

$$= (\sqrt{3})^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= 3 + 3 \times \frac{3}{4} \;\; = 3 + \frac{9}{4} = \frac{12+9}{4} = \frac{21}{4}$$

उदाहरण –2

हल $\frac{\cos 45^2}{\sec 30^\circ + cosec\ 30^\circ}$ चुंकि $\left[\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ $sosec\ 30^\circ = 2$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}\,(3-1)} = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}\,)} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{8}$$

उदाहरण –3

यदि $\tan 3x^\circ = \sin 45^\circ\ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए। $(x < 90^\circ)$

हल $\tan 3x^\circ = \sin 45^\circ\ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$

$$\tan 3x^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$\left\{\begin{matrix} \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

$$\tan 3x^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$\tan 3x^\circ = 1$$

चूकी $(1 = \tan 45^\circ)$

$\therefore\ \tan 3x^\circ = \tan 45^\circ$

अतः $3x^\circ = 45^\circ$

$x^\circ = 15^\circ$

उदाहरण –4 यदि $\sin(A+B) = 1$ तथा $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ यहाँ $0^\circ > (A+B) \leq 90^\circ A > B$ हो तो A तथा B के मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sin(A+B) = 1$

$\sin(A+B) = \sin 90^\circ$ चूकी $[\sin 90^\circ = 1]$

$A + B = 90^\circ$ ——(1)

$\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\ (A-B) = \cos 30^\circ$

$A - B = 30^\circ$ ——(2)

समीकरण 1 व 2 को जोड़ने पर

$2A = 120^\circ$

$A = 60^\circ$

A का मान समीकरण 1 में रखने पर

$60^\circ + B = 90^\circ$

$B = 90^\circ - 60^\circ$

$B = 30^\circ$

$\therefore A = 60^\circ, B = 30^\circ$

उदाहरण –5 सिद्ध कीजिए $4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = -\frac{1}{4}$

हल L.H.S. $= 4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ$

$$= 4\,(1)^2 - (2)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= 4\text{x}1 - 4 - \frac{1}{4} = 4 - 4 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \quad = \text{R.H.S}$$

उदाहरण –6 सिद्ध कीजिए $(1 - \sin\ 45^\circ - \sin^2 30^\circ)(1 + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{7}{4}$

हल L.H.S. $= (1 - \sin\ 45^\circ - \sin^2 30^\circ)(1 + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ)$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)$$

$=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\boxed{(A+B)(A-B)}$

$=\frac{18-4}{8}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}=R.H.S.$

उदाहरण –7 यदि $x = 30°$ हो तो सिद्ध किजिए–

(i) $\sin 3x = 3\sin x - 4\,sin^3 x$ (ii) $\cos 3x = 4\,cos^3 x - 3\cos x$

हल = (i) $\sin 3x = 3\sin x - 4\,sin^3 x$

L.H.S. $=\sin 3x - \sin 3x\,30° = \sin 90° = 1$

R.H.S. $=3\sin x - 4\sin^3 x$

$=3\sin 30° - 4\sin^3 30°$

$=3\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$=\frac{3}{2} - 4\,x\,\frac{1}{8}$

$=\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

$=\frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ L.H.S.= R.H.S.

हल = L. H. S. $\rightarrow \cos 3x = \cos 3x30° = \cos 90° = 0$

= R. H. S. $\rightarrow cos^3 x - 3\cos x$

$=4\cos^3 30° - 3\cos 30°$

$=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=4\,\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

$\therefore$ L.H.S.= R.H.S.

अध्याय–7
त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ के आधार पर विभिन्न प्रश्नों के हल करेंगे।
$\sin\theta, cosec\ \theta$, का
$\cos\theta, sec\ \theta$, का
तथा $\tan\theta, cot\ \theta$,का व्युत्क्रम है
इस प्रकार

(i) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{sin\theta}$ या $\sin\theta = \frac{1}{cosec\ \theta}$ या $\sec\theta, sin\ \theta = 1$

(ii) $\sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$ या $\cos\theta = \frac{1}{sec\ \theta}$ या $\sec\theta, cos\ \theta = 1$

(iii) $\cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$ या $\tan\theta = \frac{1}{cot\ \theta}$ या $\cot\theta, tan\ \theta = 1$

(iv) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (v) $\tan\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

सर्वसमिकाएँ ज्ञात करने के लिए निम्न चरण अपनायेंगे –

प्रथम चरण $\rightarrow \sin\theta$ => द्वितीय चरण $\rightarrow \sin^2\theta$

(प्रथम चरण त्रिकोणमितीय अनुपातों को दिखाएँ गए क्रम में लिखें)

$\sin\theta$	$\sin^2\theta$
$\cos\theta$	$\cos^2\theta$
$\tan\theta$	$\tan^2\theta$
$\cot\theta$	$\cot^2\theta$
$\sec\theta$	$\sec^2\theta$
soces θ	soces$^2\theta$

तृतीय चरण $\begin{matrix}\sin^2\theta\\ +\\ \cos^2\theta\end{matrix} = 1$ पंचम चरण

$1+\tan^2\theta \rightarrow \sec^2\theta$
$1+\cot^2\theta \rightarrow \operatorname{cosec}^2\theta$

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
(ii) $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$
(iii) $1+\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

चतुर्थ चरण
तृतीय चरण में प्रथम व द्वितीय पर को योग 1 के बराबर पूर्व 1 जोड़कर क्रमशः पाचवें व छठवें पद के बराबर करे।

पंचम चरण →(इन्हें इन रूपों में भी लिखा जा सकता है।)

सर्वसमिका → 1 $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1 \begin{cases}\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta\\ \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta\end{cases}$

सर्वसमिका → 2 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \begin{cases}1 = \sec^2\theta-\tan^2\theta\\ \tan^2\theta = \sec^2\theta-1\end{cases}$

सर्वसमिका → 3 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \begin{cases}1 = \sec^2\theta-\tan^2\theta\\ \tan^2\theta = \sec^2\theta-1\end{cases}$

उदाहरण –1 सिद्ध कीजिए की – $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta} = 2\sec\theta$

हल $= \text{L. H. S.} \rightarrow \frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}$

$= \frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} + \frac{2}{1-\sin^2\theta}$ चूकी$[1-\sin^2\theta = \cos^2\theta]$

$= 2\frac{1}{\cos^2\theta} = 2\sec^2\theta$

उदाहरण –2 सिद्ध कीजिए की – $= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$

हल $= \text{L. H. S.} \rightarrow \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ अंश व हर का $\sqrt{1+\cos\theta}$ से गुणा करने पर

$= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\, x \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos\theta}}\, x \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$

$= \frac{1+\cos\ \theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

$= R.H.S.$

उदाहरण –3 सिद्ध कीजिए की – $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

हल $L.H.S. \rightarrow \cos^4\theta - \sin^4\theta$

$= (\cos^2\theta)^2 - (\sin^2\theta)^2$ चूकी$[a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ चुंकि $[\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= 1(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ $[\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta]$

$= (1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta)$

$= 1 - 2\sin^2\theta = R.H.S.$

उदाहरण –4 सिद्ध कीजिए की – $\left(\frac{1+tan^2\theta}{1+cot^2\theta}\right) = \left(\frac{1-tan^2\theta}{1-cot^2\theta}\right)^2 = tan^2\theta$

हल $L.H.S. \rightarrow$

(i) $\frac{1+tan^2\theta}{1+cot^2\theta}$

$= \frac{sec^2\theta}{cosec^2\theta}$

$= \left[\frac{sec\theta}{cosec\theta}\right]^2 = \left[\frac{1/cos\theta}{1/sin\theta}\right]^2$

$= \left[\frac{1}{cos\theta} x \frac{sin\theta}{1}\right]^2 = \left[\frac{sin\theta}{cos\theta}\right]^2 = (tan\theta)^2$

$= \tan^2\theta = R.H.S.$

(ii) $\left(\frac{1-tan\ \theta}{1-cot\ \theta}\right)^2$ $tan^2\theta, cot^2\theta$ को $sin^2\theta$ व $coc^2\theta$ में बदलिए।

$= \left[\frac{\frac{1-sin\theta}{cos\theta}}{\frac{1-cos\theta}{sin\theta}}\right]^2 = \left(\frac{\frac{cos\theta-sin\theta}{cos\theta}}{\frac{sin\theta-cos\theta}{sin\theta}}\right)^2$

$= \left[\frac{(cos\theta-sin\theta)}{cos\theta} x \frac{sin\theta}{sin\theta-cos\theta}\right]^2$

$= \left[\frac{(sin\theta-cos\theta)sin\theta}{cos\theta(sin\theta-cos\theta)}\right]^2$

$= \left[\frac{sin\theta}{cos\theta}\right]^2 = tan^2\theta = R.H.S.$

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

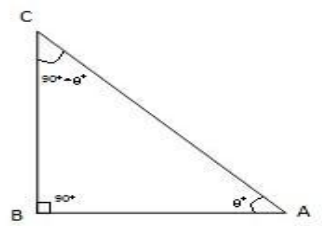
यदि दो कोणों का योग 90° हो तो दोनों कोण एक–दूसरे के पूरक कोण कहलाते है। $\theta°$ का पूरककोण $90° - \theta°$ होगा। समकोण ΔABC में $\underline{/}B$ समकोण हो तो $\underline{/}A$ व $\underline{/}C$ का योगफल 90° होगा।

$\underline{/}A + \underline{/}C = 90°$

यहाँ किसी कोण का sin = उसके पूरक कोण का *cos*

किसी कोण का tan = उसके पूरक कोण का *cot*

किसी कोण का sec = उसके पूरक कोण का *cosec*



अर्थात $(i)\begin{cases}\sin(90° - \theta°) = \cos\theta \\ \cos(90° - \theta°) = \sin\theta\end{cases}$

$(ii)\begin{cases}\tan(90° - \theta°) = \cot\theta \\ \cot(90° - \theta°) = \tan\theta\end{cases}$

$(ii)\begin{cases}\sec(90° - \theta°) = \operatorname{cosec}\theta \\ \operatorname{cosec}(90° - \theta°) = \sec\theta\end{cases}$

उदाहरण –1 का मान ज्ञात कीजिए – $\frac{\cos 37°}{sin53°}$

हल विधि –1 $\frac{\sin(90-37°)}{sin53°} = \frac{sin53°}{sin53°} = 1$

या विधि –2 $\frac{\cos(90°-53°)}{sin53°} = \frac{sin53°}{sin53°} = 1$

उदाहरण –2 $sin^2 50° + sin^2 40°$

चुंकि $sin50° = \sin(90 - 40°) = \cos 40°$

हल $cos^2 40° + \sin^2 40°$ चुंकि $[cos^2\theta + sin^2\theta = 1]$

$= 1$

उदाहरण –3 $\tan 39° + cot\ 51°$

हल $\tan(90° - 51°) - \cot 51°$

$= cot\, 51° - \cot 51°$

$= 0$

उदाहरण –4 सिद्ध कीजिए कि $\tan 75° \tan 15° \, tan 20° \tan 70° = 1$

हल $L.H.S. \rightarrow \tan 15° \, tan 20° \tan 70° \tan 75°$

$= \tan 15° \, tan 20° \tan(90° - 20°) \tan(90° - 15°)$

$= \tan 15° \, tan 20° cot 20° \cot 15°$

$= \tan 15° \, tan 20° x \frac{1}{tan 20°} x \frac{1}{tan 15°}$

$= 1 = R.H.S.$

उदाहरण –5 यदि $\tan 2A = \cot(A - 18)°$ हो तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल $tan 2A = \cot(A - 18°)$

$\cot(90° - 2A°) = \cot(A - 18°)$

$90° - 2A° = A - 18°$

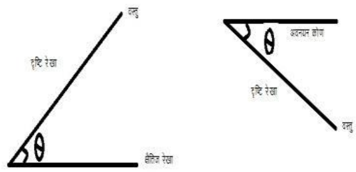
$3A = 108°$

$A = 36°$

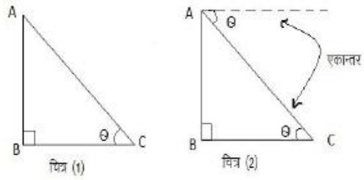
अध्याय–8
ऊँचाई और दूरी

त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग

1. मनुष्य की आँख क्षैतिज रेखा के साथ उपर देखनेपर (दृष्टि रेखा) जो कोण बनाती है, वह उन्नयन कोण कहलाता है। तथा नीचे की ओर रखी वस्तु को देखने पर क्षैतिज रेखा व दृष्टि रेखा के मध्य का कोण अवनयन कोण कहलाता है।



2. इस प्रकार के प्रश्नों में सदैव समकोण त्रिभुज बनेगा। इसमें मीनार, खम्भा, पेड़ आदि लम्बरूप में होगी। जिसे चित्र में AB द्वारा व्यक्त किया है।



चित्र (i) में C से मीनार के शीर्ष को देखने पर कोण उन्नयन कोण कहलायेगा।
चित्र (ii) में A से (मीनार के शीर्ष से) बिन्दु C को देखता है तो यह कोण अवनयन कोण कहलायेगा। जिसे चित्रानुसार बनाया जायेगा। जा $\angle C$ के एकान्तर होने के कारण $\angle C$ के बराबर होगा।

3. समकोण त्रिभुज में त्रिकोणमितीय अनुपातों का प्रयोग

ΔABC में

$$tan\theta \quad \frac{AB}{BC} \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$sin\theta \quad \frac{AB}{AC} \quad \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

$$cos\theta \quad \frac{BC}{AC} \quad \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

sin	cos	tan
ल.	आ.	ल.
क	क	आ

संक्षेप में

Q, AB, BC या AC में दिए मान रख कर समस्या को हल करेगें।

उदाहरण –1 एक स्तम्भ के उपरी सिरे का उन्नयन कोण आधार तल के एक बिन्दु पर $60°$ है। यदि यह बिन्दु स्तम्भ के आधार बिन्दु से $10\sqrt{3}$ मीटर की दूरी पर हो तो स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

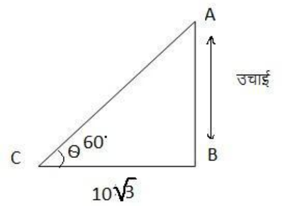
हल : माना AB स्तम्भ है जिसके आधार से $10\sqrt{3}$ मीटर की दूरी पर स्थित बिन्दु C से स्तम्भ के शिखर का उन्नयन कोण $60°$ माना स्तम्भ AB की ऊँचाई h मीटर है।

समकोण ΔABC में $tan60° = \frac{AB}{BC}$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{10\sqrt{3}}$$

$$h = 10\sqrt{3}\, x\, 3$$

$$h = 30 \text{ मीटर}$$



अतः स्तम्भ AB की उचाई 30 मीटर है।

उदाहरण –2 एक उर्ध्वाधर खम्बे परछाई, खम्बे की उचाई के बराबर है तो सूर्य का उन्नयन कोण होगा।

समकोण त्रिभुज ΔABC में लम्ब व आधार बराबर है लम्ब $= AB$, आधार$= BC$

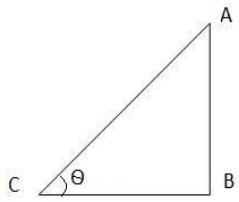
$$tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)$$

$$tan\theta = \frac{h}{h}$$

$$tan\theta = 1$$

$$tan\theta = tan45$$

$$\theta = 45$$



उदाहरण –3 100 मी॰ चोड़ी नदी के मध्य एक छोटा टापू है। इस पर एक ॰ चोड़ी नदी के मध्य एक छोटा टापू है। इस पर एक ऊँचा वृक्ष है। नदी के विपरीत किनारों पर दो बिन्दु P व Q इस प्रकार स्थित है कि P, Q और वृक्ष एक रेखा में है। यदि P व Q से वृक्ष की चोटी का उन्नयन कोण $30°$ और $40°$ हो, तो वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना वृक्ष की ऊँचाई $AO = h$ मीटर है।

समकोण ΔPOA में

$$tan30° = \frac{OA}{OP} \qquad \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\text{या } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(100-x)}$$

या $h\sqrt{3} = (100 - x)$ -->(1)

समकोण ΔAOQ में

$$tan45° = \frac{OA}{OQ}$$

या $1 = \frac{h}{x}$ या $h = x$ -->(2)

(1) में (2) से $h = x$ रखने पर $\sqrt{3}x = 100 - x$

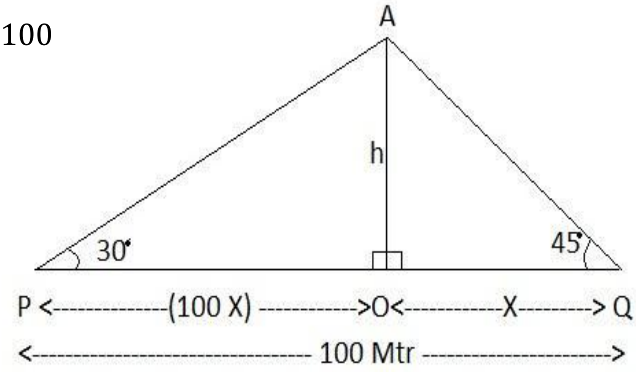
या $\sqrt{3}x + x = 100$ या $x\,(\sqrt{3} + 1) = 100$

या $x = \frac{100}{\sqrt{3}+1} x \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$ परिमेयकरण

$$= \frac{100(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2}$$

$$= \frac{100(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2} = 50(\sqrt{3} - 1)$$

$$= \frac{\overset{50}{\cancel{100}}(\sqrt{3} - 1)}{\cancel{2}} = 50(\sqrt{3} - 1) \text{ मी.}$$



अतः 2 से $h = 50(\sqrt{3} - 1)$

$= 50(1.732 - 1)$

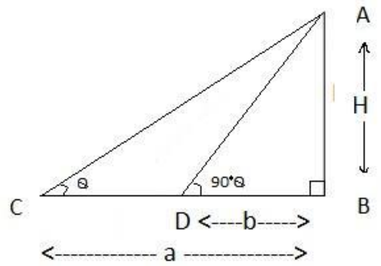
$= 50\, X\, 0.732$

$= 36.6$ मीटर

<u>**उदाहरण –4**</u> किसी मिनार के आधार से a व b दूरी पर एक ही रेखा पर स्थित दो बिन्दु क्रमशः c व d से देखने पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण एक दूसरे के पूरक है। सिद्ध कीजिए कि मीनार की एक ऊँचाई $\sqrt{ab}$ है।

हलः माना AB मीनार $= h$ मी. है, c व d पर क्रमश कोण θ व $(90 - \theta)$ परस्पर पूरक कोण है।

$BC = a\, Mtr \;\; BD = b\, Mtr$



समकोण ΔPOA में

$tan\theta = \frac{AB}{BC}$

या $tan\theta = \frac{h}{a}$ --->(1)

समकोण ΔABD में

$$\tan(90 - \theta) = \frac{AB}{BD}$$

या $cot\theta = \frac{h}{b}$ --->(2)

1 X 2 $tan\theta \; X \; cot\theta = \frac{h}{a} X \frac{h}{b}$

या $h^2 = ab$

या $\frac{h^2}{ab} = 1$

या $h = \sqrt{ab}$

अध्याय – 9
निर्देशांक ज्यामिति

मुख्य सूत्र

1. बिन्दु $P(x, y)$ की मूल बिन्दु से दूरी

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$ जहाँ O मूल बिन्दु है।

नोट– मूल बिन्दु O के निर्देशांक (O, O)

2. दो बिन्दुओं के मध्य दूरी

यदि $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ दो दिये हुए बिन्दु हो तो उनके मध्य दूरी–

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

या

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

3. दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$A(x_1, y_1)$ $C(x, y)$ $(x_2, y_2)B$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$C(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

4. विभाजन सूत्र–

(i) अन्तः विभाजन – यदि $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को $C(x, y)$ बिंदु $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजन करें तो–

m1 m2

A C B

$(x_1 y_1)$ (x, y) (x_2, y_2)

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

(ii) बाह्य विभाजन :– $x = \dfrac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}$, $y = \dfrac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$

प्रश्न

Type – I

1. X – अक्ष का समीकरण लिखों।

Ans. Y = O

2. Y – अक्ष का समीकरण लिखों

Ans. X = O

Type – II

1. बिन्दु (3,4) की Y – अक्ष से दूरी ज्ञात करो।

Ans. Y – अक्ष से दूरी = 3 इकाई [y अक्ष से दूरी = x का निर्देशांक।]

2. बिन्दु (5, -2) की X – अक्ष से दूरी ज्ञात करो।

Ans. X – अक्ष से दूरी = 2 इकाई [दूरी सदैव धनात्मक होती है]

Type – III (सूत्र $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$)

1. बिन्दु (3,4) की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।

हलः– मानाकि $P(x, y) = (3, 4)$

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
= 5 इकाई

2. बिन्दु (- 2, 3) की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।

हलः– मानाकि $P(x,y) = (-2,3)$

OP = ?

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + (3)^2}$$
$$= \sqrt{4+9}$$
$$= \sqrt{13} \text{ इकाई}$$

3. बिन्दु $\left(a\sin\theta, a\cos\theta\right)$ की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिये।

हलः– मानाकि $P(x,y) = (a\sin\theta, \cos\theta)$

OP = ?

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(a\sin\theta)^2 + (a\cos\theta)^2}$$
$$= \sqrt{a^2\sin^2\theta} + a^2\cos^2\theta$$
$$= \sqrt{a^2 \times 1}$$
$$= \sqrt{a^2}$$
= a इकाई

<u>अभ्यास प्रश्न</u>– (सूत्र $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ पर आधारित)

1. बिन्दु $(-a,b)$ की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।
2. बिन्दु $\left(\sin\theta, \cos\theta\right)$ की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।
3. बिन्दु $\left(1, \sqrt{2}\right)$ की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।

Type IV - (दो बिन्दुओं के मध्य दूरी के सूत्र से)

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

प्रस. (1) बिन्दु (2,3) और बिन्दू (5,6) के बीच की दूरी ज्ञात करो।

$A(x_1 y_1) = (2,3)$ $B(x_2, y_2) = (5,6)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2}$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$$
$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{इकाई}$$

2. यदि बिन्दु $(x,3)$ तथा $(3,7)$ के बीच की दूरी 5 इकाई हो तो x का मान ज्ञात करो।

हलः– ——— 5 इकाई ———

$A(x_1 y_1) = (x,3)$ $B(x_2 y_2) = (5,7)$

AB = 5 इकाई

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

या, $5=\sqrt{(5-x)^2+(7-3)^2}$

या $5=\sqrt{(5-x)^2+(4)^2}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

या $(5)^2=(5-x)^2+(4)^2$

या $(5-x)^2=(5)^2-(4)^2$

या $(5-x)^2=25-16$

या $(5-x)^2=9$

या $(5-x)=\sqrt{9}$

या $5-x=\pm 3$

(i) $-x=\pm 3-5$ (ii) $-x=-3-5$

या $-x=-2$ या $-x=-8$

या $x=2$ या $x=8$

Ans. $x=2,8$

प्र.(1) बिन्दुओ (3, a) और (4, 1) के बीच की दूरी $\sqrt{10}$ हो तो a का मान ज्ञात करो।

प्र.(2) x - अक्ष पर वह बिन्दू ज्ञात करो जो बिन्दुओ (-2, -5) और (2,-3) से समदुरस्थ हो।

TYPE-5 (मध्य बिन्दू के निर्देशांक ज्ञात करना)

सुत्र $x\,\dfrac{x_1+x_2}{2}$ $y\,\dfrac{y_1+y_2}{2}$

प्र. (1) बिन्दुओं (22,20) और $(o,16$ को मिलाने वाली रेखा

हल–

P (मध्यबिन्दू)

$A\begin{pmatrix}22,20\\x_1,y_1\end{pmatrix}$ (x,y) $B\begin{pmatrix}0,16\\x_2y_2\end{pmatrix}$

मध्य बिन्दू के निर्देशांक

$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

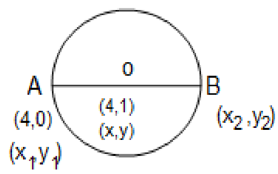
$x=\dfrac{22+0}{2}$ $y=\dfrac{20+16}{2}$

$x=\dfrac{22}{2}=11$ $y=\dfrac{36}{2}=18$

P (xy) = (11,18)

प्र.(2) किसी वृत के व्यास का एक सीरा (4,0) है तथा वृत के केन्द्र बिन्दू के निर्देशांक (4,1) है तो वृत के व्यास के दूसरे सीरे के निर्देशांक ज्ञात करो।

हलः– वृत का केन्द्र, व्यास AB का मध्य बिन्दू होता है अतः मध्य बिन्दू ज्ञात करने के सुत्र का प्रयोग करेंगे।



$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

$\dfrac{4}{1}=\dfrac{4+x_2}{2}$ $\dfrac{4}{1}=\dfrac{4+x_2}{2}$

या $4+x_2=4x2$ $0+y_2=2x1$

$4+x_2=8$ $y_2=2$

$x_2=8-4$

$x_2=4$ बिन्दू B के निर्देशांक B = (4,2)

अभ्यास प्रश्न–

प्रस.(1) एक रेखाखण्ड AB का एक सिरा A(4,0) है तथा मध्य बिन्दू M(4,1) है तो रेखाखण्ड के दूसरे सीरे B के निर्देशांक ज्ञात करो।

Type – 6 विभोजन पर आधारित प्रश्न –

(A) अन्त : विभाग सुत्र $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

$$x = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

प्रस.(1) उस बिन्दू के निर्देशांक ज्ञात किजिए जो बिन्दुओ (–2,1) तथा (5,4) को जिलाने वाली रेखा को 2:3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

हलः–

(2) P (3)

m_1 ____ ____ m_1 ____

A (x,y) B

(–2,1) (5,4)

(x_1y_1) (x_2y_2)

अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दू P के निर्देशांक

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \qquad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

$$x = \frac{2\times5+3\times-2}{2+3} \qquad y = \frac{2\times4+3\times1}{2+3}$$

$$x = \frac{10-6}{5} \qquad y = \frac{8+3}{5}$$

$$x = \frac{4}{5} \qquad y = \frac{11}{5}$$

बिन्दू P के निर्देशांक $\left(\frac{4}{5},\frac{11}{5}\right)$

प्रस.(2) बिन्दुओ (–3,5) और (4,–9) को मिलाने वाली रेखाखण्ड को बिन्दू (–2,3) किस अनुपात में विभाजित करता है।

हलः– P

m_1 ____!____ m_2 ____

A B

(–3,5) (–2,3) (4,–9)
x_1y_1 xy x_2y_2

माना बिन्दू P (–2,3), बिन्दुओ A(–3,5) तथा B(4–9) को $m_1 : m_2$ मे विभाजित करती है। इस स्थिति मे अन्तः विभाजन बिन्दू सुत्र से–

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{-2}{1} = \frac{m_1\times4+m_2\times-3}{m1+m2}$$

$$\frac{-2}{1} = \frac{4m_1-3m_2}{m_1+m_2}$$

वज्रगुणन से

$$-2(m_1+m_2) = 4m_1 - 3m_2$$

$$-2m_1 - 2m_2 = 4m_1 - 3m_2$$

$$-2m_1 - 4m_1 = -3m_2 + 2m_2$$

$$-6m_1 = -m_2$$

$$\frac{m1}{m2} = \frac{1}{6} \text{ या } m_1 : m_2 = 1:6$$

प्रस.(3) x- अक्ष बिन्दुओ A(3,–5) और B(–4,7) को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करती है।

A ____ m_1 ____ p ____ m_2 ____ B

$\underset{(x_1 y_1)}{(3-5)}$ $\quad$ $\underset{y=0}{x\text{अक्ष पर}}$ $\quad$ $\underset{(x_2 y_2)}{(-4,7)}$

माना बिन्दू P, X – अक्ष पर स्थित बिन्दू है। जिसके निर्देशांक (y=0) या p(x,o) होगें। माना बिन्दू P, रेखाखण्ड AB को $m_1 : m_2$ मे विभाजित करता है। इस स्थिति में अन्तः विभाजन बिन्दू सुत्र से (चुकि यहाॅ Y=O है अतः Y निर्देशांक के सुत्र का उपयोग किया जाएगा)

$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{o}{1} = \frac{m_1 \times 7 + m_2 x - 5}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{o}{1} = \frac{7m_1 - 5m_2}{m_1 + m_2}$$

वज्र गुणन से

$$7m_1 - 5m_2 = 0$$

$$7m_1 - 5m_2$$

$$\frac{m1}{m2} = \frac{5}{7} \qquad m_1 : -m_2 = 5:7$$

(B) बाह्य विभाजन :

विभाजन बिन्दु

$A(x_1 y_1)$ $\quad$ $B(x_2 y_2)$ $\quad$ $P(x, y)$

सुत्रः $\quad x = \dfrac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}, \qquad y = \dfrac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$

प्रश्नः (1) उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं A(5,–2) और $B(-1\frac{1}{2},4)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 7:9 में बाह्य विभाजित करता है।

हलः

$\overset{m_1 : m_2}{7:9}$ $\quad P(x, y)$

$\underset{x_1 y_1}{A(5,-2)}$ $\quad$ $\underset{x_2 y_2}{B(-1\frac{1}{2},4)}$

बाह्य विभाजन सूत्र से

$$x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_2 - m_1}, \qquad y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

$$x = \frac{1(-1\frac{1}{2}) - 9(5)}{7-9}, \qquad y = \frac{7(4) - 9(-2}{7-9}$$

$$x = \frac{7\left(\frac{-3}{2}\right) - 45}{-2}, \qquad y = \frac{28+18}{-2}$$

$$x = \frac{-21-45}{-2}, \qquad y = \frac{46}{-2}$$

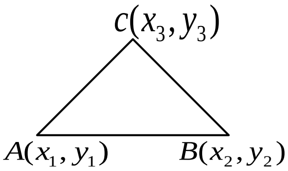
$$x = \frac{\left(\frac{-111}{2}\right)}{2}, \qquad y = -23$$

$$x = \frac{-111}{4}, \qquad y = -23$$

$$x = 27\frac{-3}{4}, \qquad y = -23$$

अभ्यास प्रश्नः 1. बिन्दुओं (–4,4) और (7,2) को मिलाने वाली रेखा को 4:7 के अनुपात में बाह्म विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो।

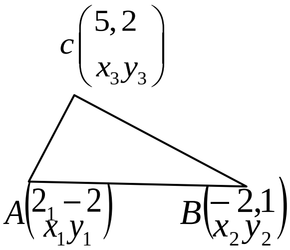
Type-(7) त्रिभुज का क्षेत्रफलः



ΔABC का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

प्रश्नः1.उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके शीर्ष क्रमशः (2,–2), (–2,1) और (5,2) हैं।

Type-(7)



ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$$= \frac{1}{2}\left[2(1-2) - 2(2+2) + 5(-2-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[2(-1) - 2(4) + 5(-3)]$$

$$= \frac{1}{2}(-2-8-15) = \frac{1}{2}(-25) = 12.5 \text{ वर्ग ईकाई}$$

नोटः क्षेत्रफल हमेशा धनात्मक ही लेते हैं।

प्रश्नः2. सिद्ध करो कि बिन्दु (1,2), (–1,0) तथा (2,3) संरेखीय है।

Hints - यदि तीन बिन्दू एक ही सरल रेखा में स्थित हो तो वे संरेखीय बिन्दू कहलाते है।

नोटः– बिन्दुओं के संरेखीय होने की शर्त त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

Hints - यदि तीन बिन्दू एक ही सरल रेखा में स्थित हो तो वे संरेखीय बिन्दु कहलाते है।

नोटः– बिन्दुओं के संरेखीय होने की शर्त त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

हलः–

$A(x_1 y_1) = (1,2)$

$B(x_2, y_2 = (-1,0)$

$C(x_3, y_3) = (2,3)$

ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$$= \frac{1}{2}\left[1(0-3) - 1(3-2) + 2(2-0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1(-3) - 1(1) + 2(2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-3-1+4)$$

$$= \frac{1}{2}(0)$$

$$= 0$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

अतः बिन्दु A,B,C संरेख हैं। (इति सिद्धम्)

प्रश्नः3: यदि बिन्दु (1,2), (-1,x) तथा (2,3) संरेखी हो तो x का मान ज्ञात करो।

$A(x_1, y_1) = (1,2)$

हलः $B(x_2, y_2) = (-1, x)$

$C(x_3, y_3) = (2,3)$

बिन्दु A,B,C संरेखी हैं।

ΔABC का क्षेत्रफल = 0

$$\frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2\left(y_3 - y_1 + x_3(y_1 - y_2)\right)\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}[1(x-3) - 1(3-2) + 2(2-x) = 0]$$

$$\frac{1}{2}[x - 3 - 1 + 4 - 2x] = 0$$

$$\frac{1}{2}[-x] = 0$$

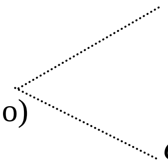
$$-x = 0$$

$$x = 0$$

प्रश्नः यदि P और Q के निर्देशांक क्रमशः $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ और $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ है तो सिद्ध कीजिए $op^2 + oq^2 = a^2 + b^2$ जहा o मूल बिन्दू है।

हलः $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$

O
(o,o)



$Q(-a\sin\theta, b\cos\theta)$

दुरी का सुत्र $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$L.H.S. = OP^2 + OQ^2$$

$$= \left[\sqrt{(a\cos\theta - 0)^2 + (b\sin\theta - 0)^2}\right]^2 + \left[\sqrt{(-a\sin\theta - 0)^2 + (b\cos\theta - 0)^2}\right]^2$$

$$= (a\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2$$

$$= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$$= (a^2 + b^2)\cos^2\theta + (a^2 + b^2)\sin^2\theta$$

$$= (a^2 + b^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$= a^2 + b^2$$

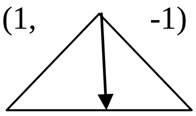
= R.H.S.

$$OP^2 + OQ^2 = a^2 + b^2$$

(इति सिद्धम्)

प्रश्नः– उस त्रिभुज की माध्यिकाओ की लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष (L,-1), (0,4) और (-5,3) है। (very dmpostons questions)

हलः– A (1, -1) माध्यिकाः शीर्ष से सामने वाली भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा माध्यिका कहलाती है।



B(0,4) C(-5,3) (अतः सर्वप्रथम भुजाओ के मध्य बिन्दु ज्ञात करेगे)

p

मध्य बिन्दु का मुख $\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$

P,Q,R क्रमश : BC, AC व AB के मध्य बिन्दू है

अतः P के निर्देशांक $=\left[\frac{0-5}{2},\frac{4+3}{2}\right]$

$=\left[\frac{-5}{2},\frac{7}{2}\right]$

Q के निर्देशांक $=\left[\frac{1-5}{2},\frac{-1+3}{2}\right]$

$=(-2,1)$

R के निर्देशांक $\left(\frac{1+0}{2},\frac{4-1}{2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

AP की लम्बाई $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$AP=\sqrt{\left(\frac{-5}{2}-1\right)^2+\left(\frac{7}{2}+1\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{81}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{130}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{130}}{2}$$

BQ की लम्बाई $=\sqrt{(-2-0)^2+(1-4)^2}$

$$=\sqrt{4+9}$$

$$=\sqrt{13}$$

CR की लम्बाई $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+5\right)^2+\left(\frac{3}{2}-3\right)^2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{121}{4}+\frac{9}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{130}}{2}$$

विशेष अभ्यास प्रश्नः

(1) सिद्ध कीजिये कि बिन्दु (a,a), (-a,-a) और $\left(-\sqrt{3a},\sqrt{3a}\right)$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(Hint : त्रिभुज का प्रकार ज्ञात करने के लिये दूरी सूत्र से तीनो भुजाओं की लम्बाई ज्ञात करें।)

(2) यदि एक समबाहु त्रिभुज के दो शीर्ष (0,0) और $\left(3,\sqrt{3}\right)$ हों, तो तीसरा शीर्ष ज्ञात करो।

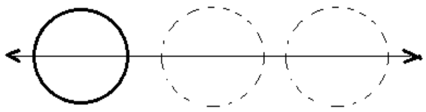
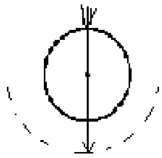
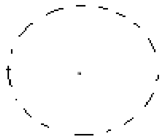
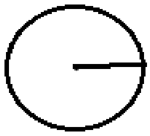
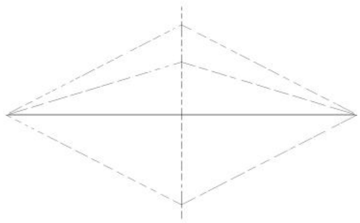
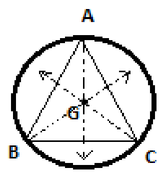
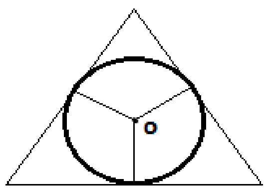
(3) रेखा $3x+y=9$ बिन्दुओं $(1,3)$ तथा $(2,7)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को किस अनुपात में विभाजित करती है।

(4) यदि त्रिभुज की भुजाओं के मध्य (1,2), (0,–1) और (2,–1) हैं, तो त्रिभुज के शीर्षो के निर्देशांक ज्ञात कीजिये।

अध्याय – 10

बिंदुपथ

अतिलघुरात्मक प्रश्न (1 अंक)

क्र-स-	प्रश्न	हल	चित्र
1	किसी समतल पर लुढ़कने वाले वृत के केंद्र का बिन्दुपथ	समतल के समांतर रेखा	
2	घड़ी के पेंडुलम का बिन्दुपथ	वृत का माप	
3	घड़ी की सुई का बिन्दुपथ	वृताकार	
4	एक स्थिर बिन्दु से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ	वृत की परिधि	
5	दो स्थिर बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिंदुपथ	दोनों बिन्दुओ को मिलने वाली रेखा का लंब समद्विभाजक	
6	त्रिभुज के शीर्षो से समदूरस्थ बिन्दु	परिकेन्द्र	
7	त्रिभुज की भुजाओं से समदूरस्थ बिन्दु	अंतःकेंद्र	

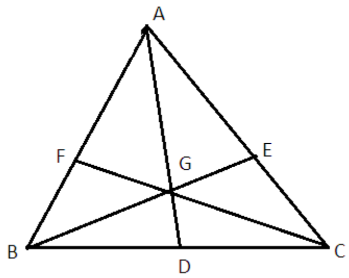
बिन्दुपथ - दी गई शर्त के अनुसार बिन्दुओ के गमन का रास्ता।

(B) 3 अंक भार के लघुरात्मक प्रश्न

(1) *त्रिभुज ABC मे मध्यिका AD, BE, CF एक बिन्दु G से गुजरने है यदि AG = 6 Cm , BE = 12.6 Cm तथा FG = 3 Cm तो AD , GE और GC ज्ञात कीजिये ?*

हल - केंद्रक G मध्यिका को 2 : 1 मे विभाजित करती है|

अत: AG = 2a व GD = a व AD = 3a



दिया है (i) $AG = 6Cm$

$$2a = 6Cm$$
$$a = \frac{6}{2}$$
$$a = 3Cm$$

अत: $AD = 3\times 3 = 9$

(ii) BG = 2b , GE = b , BE = 3b

दिया है $BE = 12.6$

$$3b = 12.6$$
$$b = \frac{12.6}{3} = 4.2$$

अत: $GE = b = 4.2$

(iii) GC = 2c , GF = c , CF = 3c

अत: दिया है - $FG = 3Cm$

$$c = 3Cm$$
$$GC = 2\times 3 = 6$$

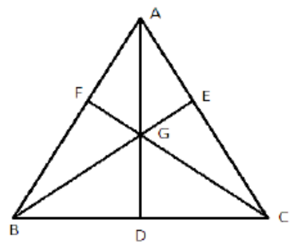
2)) *त्रिभुज ABC मे मध्यिकाए AD , BE , और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती है सिद्ध कीजिये की AD + BE > (3/2) AB*

हल - त्रिभुज AGB मे - [त्रिभुज मे दो भुजा क योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है]

AG + BG >AB

मान रखने पर $\frac{2}{3}AD + \frac{2}{3}BE > AB$

$$AD + BE > \frac{3}{2}AB$$



याद रखने योग्य

(3) *यदि एक त्रिभुज की सभी मध्यिकाए समान हो तो वह त्रिभुज होगा*

हल - दिया है - त्रिभुज ABC की मध्यिकाए AD , BE , व CF बिन्दु G पर मिलती है तथा

$$AD = BE = CF$$

सिद्ध करना है - त्रिभुज ABC एक समबाहु त्रिभुज होगा|

उपपति - हम जानते है की त्रिभुज की मध्यिकाओ को केंद्रक 2:1 मे विभाजित करता है|

अत: $AD = BE = CF$ (दिया है)

$$\frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF$$

$$=> AG = BG = CG..................(1)$$

इसी प्रकार $\frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}BE = \frac{1}{3}CF$

$$GD = GE = GF....................(2)$$

AG = 2a तो $a = \frac{AG}{2}$ अत: AD = 3a $\frac{3}{2}$ AG AG = $\frac{2}{3}$ AD	BG = 2b तो $b = \frac{BG}{2}$ BE = 3b = $\frac{3}{2}$ BG BG = $\frac{2}{3}$ BE

त्रिभुज BGF व त्रिभुज CGE मे

(1) से $BG = CG$

(2) से $GF = GE$

$$\angle BGF = \angle CGF$$

शीर्षभिमुख कोण

भुजा - कोण - भुजा नियम से $\Delta BGF \cong \Delta CGE$

अत: सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाए समान होती है|

$$BF = CE$$

$$2BF = 2CE$$

$$AB = AC..........................(3)$$

इसी प्रकार $\Delta CGD \cong \Delta AGF$

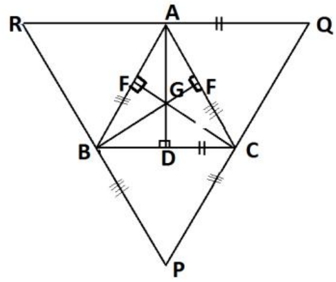
$$BC = AB.............................(4)$$

(3) व (4)से $AB = BC = AC$

अत: त्रिभुज ABC एक समबाहु त्रिभुज है|

(4) सिद्ध कीजिये की शीर्षलंब समांगी (एक ही बिन्दु से गुजरते) होते है|

हल -*दिया हुआ है* - एक त्रिभुज ABC जिसमे AD, BE व CF शीर्ष लम्ब (शीर्ष से सामने डाला गया लम्ब) है|



सिद्ध करना है - शीर्ष लम्ब AD , BE व CF एक ही बिन्दु G से गुजरते है|

रचना - A से गुजरती हुई BC के समांतर रेखा QR खिची| इसी प्रकार PR || AB एव PQ || AB खीचकर त्रिभुज PQR बनाया|

उपपति - (1) चतुर्भुज BCAR मे AC || BR एवं PQ ‖ AR (रचना से)

आमने सामने की भूजाए समांतर होने से BCAR समांतर चतुर्भुज होगा|

अत: AR = BC ......(1) [सम्मुख भुजाए बराबर]

(2) इसी प्रकार चतुर्भुज BCQA मे AB ‖ CQ एवं AQ ‖ BC (रचना से)

अत: BC = AQ ....(2)

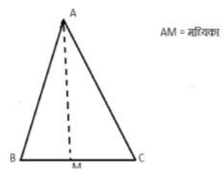
सामी. (1) व (2) से AR = AQ ....(3)

एवं AD $\perp$ BC इसी प्रकार BE लम्ब अर्द्धक है PR का तथा CF लम्ब अर्द्धक है PQ का | लम्ब अर्द्धक समांगी होते है अत: AD , BE , CF समांगी होंगे|

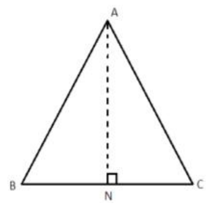
प्रमुख परिभाषा -

(a) बिंदुपथ - विशेष नियम के द्वारा बने बिन्दुओ के समुच्चय से निर्मित पथ

(b) माध्यिका - त्रिभुज के शीर्ष के सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखण्ड|



(C) शीर्षलम्ब - त्रिभुज के शीर्ष से सम्मुख भुजा पर लम्ब| चित्र मे AN शीर्षलम्ब है

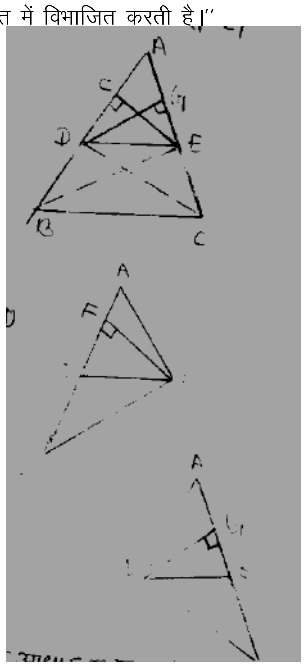


(d) समांगी रेखाए - तीन या तीन से अधिक रेखाए यदि एक ही बिन्दु से होकर गुजरे वो समांगी कहलाती है|

अध्याय – 11
समरूपता

आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय)

"किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा त्रिभुज की शेष दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।"



दिया है– ΔABC में $DE \parallel BC$, जहां DE, AB व AC को D, व E पर काटती है ।

सिद्ध करना है $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

रचना:- BE व CD को मिलाते हैं तथा E से AB पर लम्ब EF व D से AC पर लम्ब DG डालते हैं ।

उपपति:–

$$\frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta BDE \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{½ \times AD \times EF}{½ \times BD \times EF} = \frac{AD}{BD} \qquad (1)$$

तथा–

$$\frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta CED \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{½ \times AE \times DG}{½ \times CE \times DG} = \frac{AE}{CE} \qquad (2)$$

तथा ΔBDE का क्षेत्रफल $= \Delta CED$ का क्षेत्रफल

(एक ही आधार व एक समान्तर रेखा युग्म के मध्य बने त्रिभुजों के मध्य बने त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होता है ।)

सभी (1), (2) व (3) से

$$\frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta BDE \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta CED \text{ का क्षेत्रफल}}$$

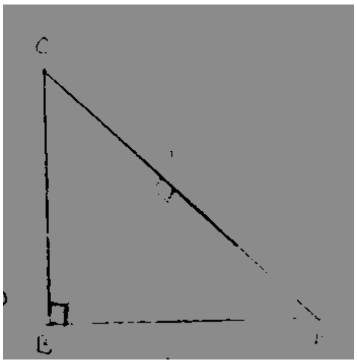
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

HENCE PROVED

(इति सिद्धम)

> (i) Δ का क्षेत्रफल = ½ x आधार x ऊँचाई ।
> (ii) एक बिन्दु से एक रेखा पर एक ही लम्ब खींचा जा सकता है। इसलिए AD भुजा व BD भुजा पर एक ही लम्ब EF

समरूपता की अवधारणा से बोधायन प्रमेय का सत्यापन



दिया है ΔABC_समकोण त्रिभुज है। जहां $\angle B = 90^0$

सिद्ध करना है : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : B से कर्ण AC पर लम्ब AD डालते हैं।

उपपति: ΔABC व ΔABD में

$\angle B\underline{\mathbf{A}}C = \angle B\underline{\mathbf{A}}D$ (उभयनिष्ठ)

तथा $\angle C\underline{\mathbf{B}}A = \angle A\underline{\mathbf{D}}B$ (समकोण)

AA समरूपता गुणधर्म से

$\Delta ABC \quad \Delta ADB$ (जो कोण बराबर सिद्ध किए हैं उन्हें उसी क्रम में लिखें)

$\Delta\ \overline{A}BC \qquad \Delta\ \overline{A}DB$

अतः $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$

इनमें से वो दो भाग चुने जिनमें एक पद AB उभयनिष्ठ है।

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

$AB^2 = AC\ AD$ (1)

इसी प्रकार ΔABC व ΔBDC

$\angle ABC = \angle BDC$ (समकोण)

$\angle BCA = \angle BCD$ (उभयनिष्ठ)

AA समरूपता गुणधर्म से

> Note = $\angle B = \angle D$
> $\angle C = \angle C$

$\Delta BCA \sim \Delta DCB$

$$\frac{BC}{DC}=\frac{CA}{CB}=\frac{BA}{DB}$$

$$\frac{BC}{DC}=\frac{CA}{BC}$$

$BC^2 = CA. DC$ ---------- (2)

सभी (1) + समीकरण 2 से

$AB^2 + BC^2 = AC. AD + AC. DC$

$= AC (AD + DC)$

$= AC. AC$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

प्र.1 किसी समबाहु त्रिभुज ABC में BC भुजा पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ तो सिद्ध करो $9\ AD^2 = 7AB^2$

हलः– दिया है ΔABC समबाहु त्रिभुज हैं।

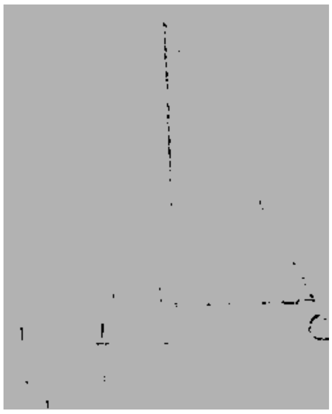
$AB = AC = BC$ (1)

तथा $BD = \frac{1}{3}BC$ (2)

रचनाः– A से भुजा BC पर लम्ब AE डालते हैं।

तथा समबाहु Δ में शीर्ष लम्ब मध्य बिन्दु पर मिलता हैः–

$BE = ½\ BC$ (3)



उपपतिः–

Step - I (2) & (3) से

$DE = BE - BD = ½\ BC - \frac{1}{3}BC$

$$DE = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)BC$$

$$= \frac{1}{6}\ BC \quad (4)$$

Step II ΔABE में

$AE^2 = AB^2 - BE^2$

$\Rightarrow AE^2 = AB^2 - (½\ BC)^2$ (सभी (3) से)

$= AB^2 - \frac{1}{4}\ AB^2\ (½\ BC)^2$ (समी (3) से)

$= AB^2 - \frac{1}{4}\ AB^2$

$AE^2 = \frac{3}{4}\ AB^2$ ....(5)

सरलता हेतु चरण–

(1) AD ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम DE = BE = BD ज्ञात करेगी ।

(2) समकोण ΔABE से AE ज्ञात करेगें ।

(3) AE व DE का प्रयोग करके AD ज्ञात करो ।

(4) Δ की सभी भुजाओं को आवश्यकतानुसार AB में लिखेगें।

Step - III समकोण ΔADE से

$AD^2 = AE^2 + DE^2$

$$AD^2 = \frac{3}{4}\ AB^2 + \left(\frac{1}{6}BC\right)^2 \quad \text{(समी (4) से)}$$

$$AD^2 = \frac{3}{4}\ AB^2 + \left(\frac{1}{6}BC\right)^2$$

$$AD^2 = \frac{3}{4}\ (AB)^2 + \frac{1}{6}\ (AB)^2$$

$$AD^2 = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{36}\right)(AB)^2$$

$$AD^2 = \frac{28}{36}\ AB^2$$

$$AD^2 = \frac{7}{9} AB^2$$

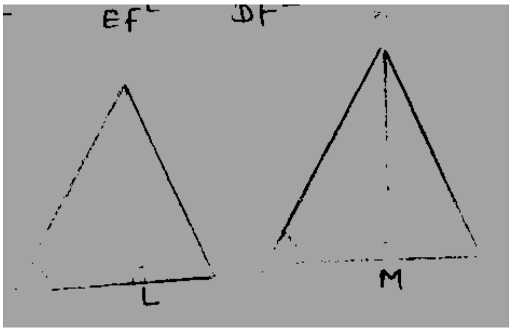
$$9AD^2 = 7 AB^2$$

प्रमेयः– दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं के वर्गों के समानुपाती होता है ।

दिया हैः– $\Delta ABC \sim DEF$

सिद्ध करना है ।

$$\left(\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF}\right) = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$$



रचनाः– A से BC पर लम्ब AL, तथा

D से EF पर लम्ब DM डालते हैं।

उपपतिः– $\because \Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\therefore$ $\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$

तथा

$$\left(\frac{AB}{DE}\right) = \left(\frac{BC}{EF}\right) = \left(\frac{AC}{DF}\right) \quad \text{--------(2)}$$

ΔABL व ΔDEM में

$\angle B = \angle E$ (1)से

$\angle L = \angle M =$ समकोण

AA समरूपता गुणधर्म से $\Delta ABL \sim \Delta DEM$

$$\left(\frac{AB}{DE}\right) = \left(\frac{AL}{DM}\right) \quad (3)$$

अब $\dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times BC \times AL}{\frac{1}{2} \times EF \times DM}$

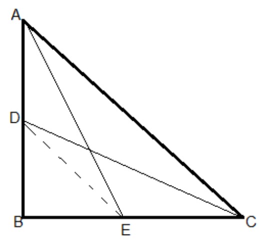
$$= \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AL}{DM}\right)$$

$$= \left(\frac{AB}{DE}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right) \quad \text{समी (2) व (3) से}$$

$$= \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$$

नोटः– इसी प्रकार दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात
(1) उनकी संगत उंचाईयों के वर्गों के समानुपाती होता है ।
(2) उनके संगत शीर्ष लम्बों के वर्गों के समानुपाती होती है ।
(3) उनकी संगत माध्यिकाओं के वर्गों के समानुपाती होता है ।
(4) उनके संगत कोणों के समद्विभाजकों के वर्गों के समानुपाती हेाता है ।

प्र. ΔABC एक समकोण त्रिभुज हैं जहॉं $LB = 90^0$ तथा D व E , AB व BC पर दो बिन्दु है सिद्ध करो । $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$



हल– L.H.S. में समकोण ΔAEB में

$AE^2 = AB^2 + BE^2$ ....(1)

तथा ΔCDB में

$CD^2 = BD^2 + BC^2$ .... (2)

(1) + (2) से

$AE^2 + CD^2 = AB^2 + BE^2 = BD^2 + BC^2$

R.H.S. के लिए

ΔABC में $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= a^2 + a^2$

$AC^2 = 2a^2$

$AC = a\sqrt{2}$

नोटः– यहां AE, CD, AC व DE समकोण Δ के कर्ण है। बोधायन प्रमेय से इनके मान ज्ञात करके उपयुक्त पदों का योग करें

भुजा AB पर बने समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

विकर्ण AC पर बने समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\sqrt{2a^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}\ (2a^2)$$

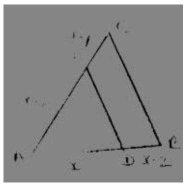
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$$

विकर्ण AC पर बने त्रिभुज का क्षेत्रफल = 2 (भुजा AB पर बने समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल)

महत्त्वपूर्ण प्रश्न–

प्र. दी गई आकृति में DE∥ BC है यदि AD = x, DB = Y-2, AE = X + 2, EC = X-1 है । तो X का मान ज्ञात कीजिए ।

हल ΔABC में DE∥ BC



$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से

$$\frac{X}{X-2} = \frac{X+2}{X-1}$$

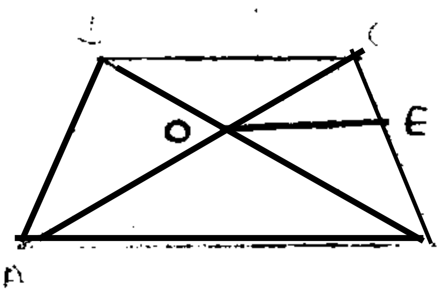
X (X -1) = (X+2)(X-2)

X^2-X=X^2-4

X = 4

प्र. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण पर परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है तो सिद्ध करो ABCDएक समलम्ब चक्र है ।

हल दिया है । $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$



सिद्ध करना है। ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है ।

अर्थात् AB∥CD

रचनाः– O से रेखाखण्ड OE∥ AB खींचते हैं।

उपपतिः– दिया है।

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

या $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$ – (1) (एक विकर्ण के दोनों भाग

ΔABC में OE∥AB

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BE}{CE}$$

या $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$ – (2) (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से।

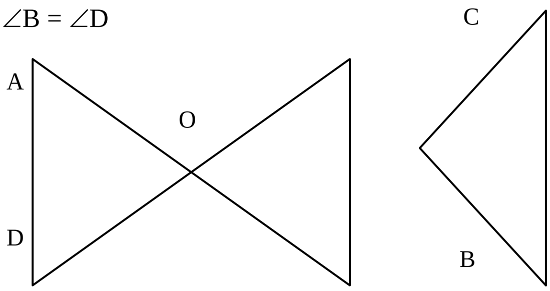
(1) व (2) से $\frac{BO}{DO} = \frac{BE}{CE}$

DE∥CD (4) (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम से।

तथा रचना से OE∥ AB -(5)

(4) व (5) से AB∥ CD इति सिद्धम् ।

प्रश्न– आकृति ने OA. OB = OC. OD तो दर्शाइए । ∠A = ∠C व ∠B = ∠D



दिया है । OA. OB = OC. OD

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} \quad \text{(i)}$$

तथा ∠AOD = ∠BOC - (iii)

सभी (1) व (2) से SAS समरूपता गुणधर्म से ।

ΔAOD ~ ΔBOC

अतः ∠A = ∠C व ∠D = ∠B

प्र. 90 Cm की लम्बाई वाली लड़की बल्ब लगे खम्भे के आधार से 1.2 मीटर/ सें. की चाल से चल रही है। यदि बल्ब भूमि से 3.6 मीटर की ऊंचाई पर हो तो 4 Sec. के बाद लड़की की छाया कितने मीटर होगी ।

हल 1 Sec. में लड़की द्वारा तय दूरी = 1.2 मीटर

4 Sec. में लड़की द्वारा तय दूरी = 1.2 X 4 मीटर = 4.8 मीटर

$\because \Delta ABC \sim \Delta CDE$

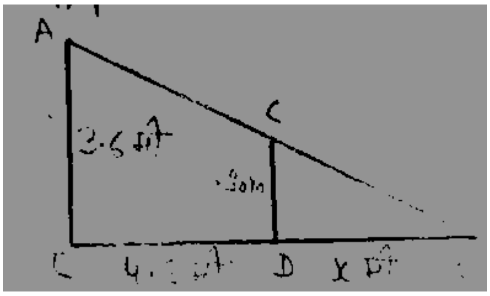
$$\therefore \quad \frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$$

$$\frac{3.6}{.9} = \frac{4.8 + x}{x}$$

4 x = 4.8 + x

3 x = 4.8

x = $\frac{4.8}{3} = 1.6$ Mtr.

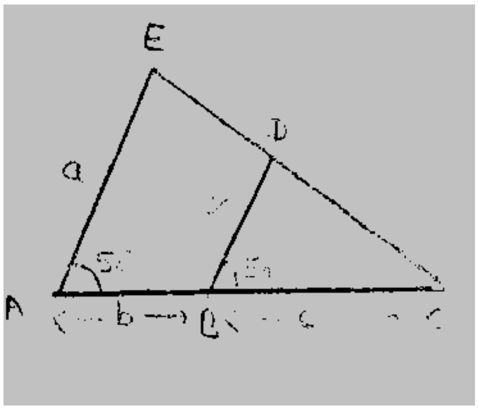


प्रश्न चित्र में x का मान व a व b के पदों में ज्ञात करो ।

हल– चित्रानुसार $\angle A = \angle B = 50^0$

– तथा $\angle ACB = \angle BCD$ उभयनिष्ठ

AA समरूपता गुणधर्म से



$$\frac{AE}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{b+c}{c}$$

x = $\frac{ac}{b+c}$

प्र. समरूप त्रिभुजों में भुजाओं का अनुपात 4:9 है तो क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करो ।

हल समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = (भुजाओं का अनुपात)^2

$$= \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

प्र. समरूप त्रिभुजों क उंचाईयों का अनुपात 2 : 3 है तो क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करो ।

हल समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात – (उंचाईयों का अनुपात)^2

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

प्र. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तथा इनके क्षेत्रफलों का अनुपात 64 : 121 तथा EF = 15.4 Cm है तो BC ज्ञात करो ।

$\because$ समरूप Δ का क्षेत्रफलों का अनुपात = भुजाओं के वर्गों का अनुपात

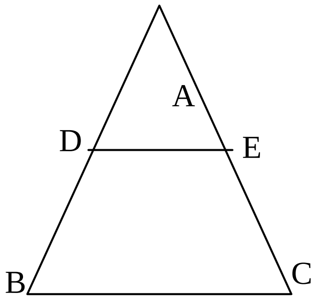
- $\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$

$$\frac{61}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2 \text{ (वर्ग हटाने पर)}$$

$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

BC = $\frac{8X15.4}{11} = 11.2$ सेमी.

प्र. ΔABC में DE // BC एवम् AD : DB = 2 : 3 हो तो ΔADE व ΔABC के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात करो ।



$$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{DB}{AD} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{3}{2} + 1$$

$$\frac{DB + AD}{AD} = \frac{3+2}{2}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{5}{2} \text{ समरूप } \frac{\Delta ADE}{\Delta ABC} \text{ का क्षेत्रफल } = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

ध्यान देने योग्य तथ्य

A. दो त्रिभुजों को सर्वांगसम करने के लिए निम्नलिखित बिन्दुओं पर ध्यान देना आवश्यक है ।

(1) दोनों त्रिभुजों में जो अवयव (भुजा व कोण) समान दिए गये हैं, उन्हें बराबर के रूप में लिखें ।

(2) यदि दोनों त्रिभुजों में कोई उभयनिष्ठ भुजा हो तो, उन्हें बराबर के रूप में लिखें ।

(3) यदि दोनों त्रिभुजों में कोई उभयनिष्ठ कोण हो, तो उन्हें बराबर के रूप में लिखें ।

(4) उपरोक्त क्रिया के पश्चात् अन्य कोई भुजा या कोण समान है तो उन्हें बराबर लिख दें ।

तत्पश्चात् निम्न गुणधर्मो में उपयुक्त गुणधर्म का चयन कर दोनों त्रिभुजों को सर्वांगसम करें ।

(i) भुजा - भुजा - भुजा (SSS)

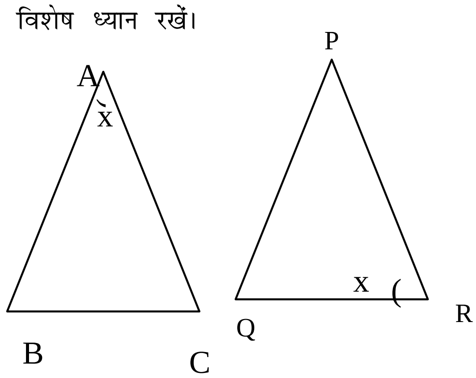
(ii) भुजा - कोण - भुजा (SAS)

(iii) कोण - भुजा - कोण (ASA)

(iv) कोण - कोण - भुजा (ASA)

(vi) समकोण- कर्ण - भुजा (RHS)

B. सर्वांगसम करते समय त्रिभुजों के अवयवों की संगतता का विशेष ध्यान रखें।



(i) जिन कोणों को बराबर सिद्ध किया है।
उन्हें त्रिभुजों के नामकरण में पहले लिखें ।
जैसे $\angle A = \angle R$ है तो त्रिभुजों के नामकरण में A व R पहले लिखें ।

(ii) AB = PR है तो AB के सामने C कोण व PR के सामने Q कोण को द्वितीय स्थान पर लिखें।

(iii) अब शेष बचे शीर्ष को लिख दें ।

अर्थात् $\Delta ACB \cong \Delta RQP$

समरूपता:- दो त्रिभुज ΔPQR में यदि ।

$\angle A = \angle Q$ - (i)

$\angle B = \angle R$ - (ii)

$\angle C = \angle P$ - (iii) है तो त्रिभुजों को

समरूप इस प्रकार लिखें ।

$\Delta ABC \sim \Delta QRP$

1 2 3   1 2 3

इनकी भुजाओं के अनुपात भी इसी क्रम में लिखें ।

जैसे $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{AC}{QP}$$

समरूपता व सर्वांगसमता में भिन्नता ।

(i) समरूपता में भुजाओं का अनुपात समान होता है ।
जबकि सर्वांगसमता में संगत भुजाओं का नाप समान रहत है ।

(ii) प्रत्येक सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते हैं। परन्तु सभी समरूप त्रिभुजों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं होता है ।

प्रमेय को हल करते समय निम्न पदों पर ध्यान दें ।

1. दिया है:- प्रमेय के कथन में दिये गये प्रतिबन्ध या चित्र के बारे में आवश्यक हिस्सा लिखें ।
2. सिद्ध करना है:- प्रमेय के कथन में जो पूछा गया है उसे गणितीय रूप में लिखें ।
3. रचना:- आवश्यकता अनुसार रचना करें ।
4. उपपति:- दिये गये प्रतिबन्ध व रचना से मिलने वाले पदों को क्रमानुसार लिखें व इनसे उपयुक्त हल प्राप्त करें ।

अध्याय – 12

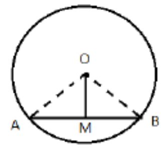
वृत्त

महत्त्वपूर्ण बिन्दुः–

1. वृत किसी तल में उन बिन्दुओं का बिन्दुपथ होता है जो तल में एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर रहते हैं ।
2. स्थिर बिन्दु वृत का केन्द्र व नियत दूरी वृत की त्रिज्या कहलाती है।
3. वृत पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड वृत की जीवा कहलाता है ।
4. वृत की जीवा वृत को दो भागों में विभाजित करता है।
   (i) लघु वृत खण्ड (ii) दीर्घव्रत खण्ड
5. इन वृत खण्डों के संगत चाप
   (i) लघु चाप (ii) दीर्घ चाप
6. लघुचाप का डिग्री माप 180^0 से कम व दीर्घचाप का डिग्री चाप 180^0 से ज्यादा होता है ।
7. तीन बिन्दुओं (असंरेखीय) से गुजरने वाला केवल एक वृत होता है।

कुछ महत्वपूर्ण प्रमेय

प्रमेय - सिद्ध कीजिये की वृत के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है



(1) दिया है - एक वृत्त जिसका केंद्र O है | जीवा AB है तथा OM⊥AB है

(2) सिद्ध करना है - AM = BM

(3) रचना - केंद्र O बिन्दु A व B से मिलाया |

(4) उपपति - त्रिभुज OMA तथा त्रिभुज OMB मे भुजा OA = भुजा OB (चकि एक ही वृत्त की त्रिज्याये है <AMO = < BMO (दोनों समकोण है चूंकि OM I AB) भुजा OM = भुजा OM (उभयनिष्ट है)

अत: त्रिभुज OMA ≅ त्रिभुज OMB

अत:Δ OMA ≅ΔOMB

AM = BM इति सिद्धम

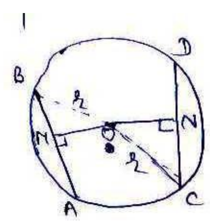
प्रमेय– समान जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होती है ।

(i) दिया है । जीवा AB व CD समान है। AB = CD

(ii) सिद्ध करना है । OM = ON

(iii) रचना:– O को B व C से मिलाते हैं।

(iv) उपपति:– दिया है । AB = CD



$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} CD$

BM = CN - (1)

OB = OC (वृत की त्रिज्या) –(2)

$\angle ONC = \angle OMB = 90^0$ – (3)

अत: RHS गुणधर्म से $\Delta OMB \cong \Delta ANC$

OM = ON इति सिद्धम

प्रमेय - वृत्त के किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरिक कोण , उसी चाप द्वारा परिधि के किसी बिन्दु पर अंतरिक कोण का दो गुना होता है|

1. दिया है - एक वृत्त जिसका केंद्र ' O ' है| चाप AB द्वारा केंद्र 'o' पर अंतरिक कोण AOB तथा परिधि के बिन्दु C पर अंतरिक कोण ACB है|

2. सिद्ध करना है - $\angle AOB = 2\angle ACB$

3. रचना - CO को मिलाते हुए आगे तक बढ़ाया तथा कोणो को चित्रानुसार नामांकित किया

उपपति - त्रिभुज AOC मे

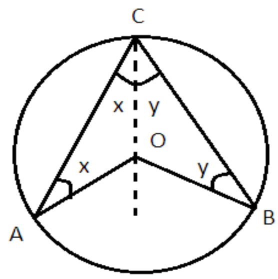
भुजा AO = भुजा OC (एक ही वृत्त की त्रिज्याये)

अत: $\angle OAC = \angle OCA = x$

चूंकि किसी त्रिभुज का बहिष्कोण , अंतराभिमुख कोण के योग के बराबर होता है|

$\angle AOE = x + x = 2x$ ....(1)

इसी प्रकार त्रिभुज OBC मे



भुजा OB = भुजा OC

$\angle OBC = \angle OCB = y$

अत: $\angle BOE = y + y = 2y$ ....(2)

सामी. (1) और (2) को जोड़ने पर

$$\angle AOE + \angle BOE = 2x + 2y$$

$$\angle AOB = 2(x + y)$$

$$\angle AOB = 2\angle ACB$$ इति सिद्धम

trick - इस प्रमेय को संक्षेप मे इस प्रकार भी सिद्ध किया जा सकता है|

उपपति - त्रिभुज AOC मे

भुजा OA = भुजा OC (एक ही वृत्त की त्रिज्याये)

$\therefore \angle OAC = \angle OCA = x$

किसी त्रिभुज का बहिष्कोण , उसके अंतराभिमुख कोणो के बराबर होता है

$$\therefore \angle AOB = \angle OAC + \angle OCA$$

$$= x + x$$

$$= 2x$$

$$\angle AOB = 2\angle ACB$$

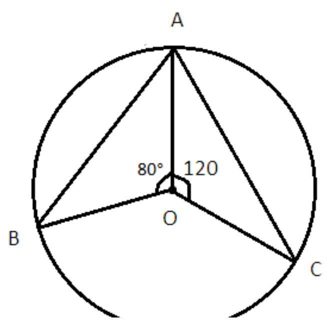
Ex. दी गई आकृति मे चाप AB और AC द्वारा केंद्र पर अन्तरित कोण क्रमश 80° तथा 120° है| कोण BAC तथा BOC ज्ञात करो

हल $\angle BOC = 360 - (80^\circ + 120)$

$= 160^\circ$

$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

$= \frac{1}{2} \times 160^\circ = 80^\circ$

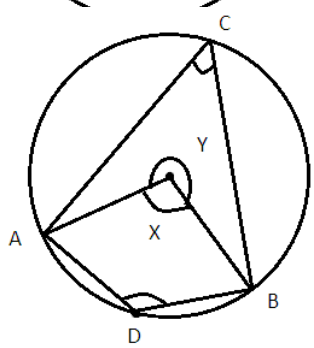


प्रमेय - चक्रीय चतुर्भुज के अभिमुख कोण संपूरक होते है

(1) दिया है - ADBC एक चक्रीय चतुर्भुज है|

(2) सिद्ध करना है -

$\angle C + \angle D = 180^\circ$



या $\angle A + \angle B = 180^\circ$

(3). रचना - वृत्त के केंद्र O को बिन्दु A तथा B से मिलाया|

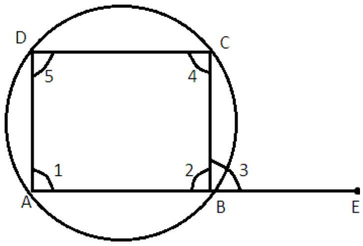
(4). उपपति - हम जानते है की वृत्त के किसी चाप द्वारा , परिधि के किसी बिन्दु बना कोण , उसी चाप द्वारा बने कोण का दोगुना होता है|

चूंकि चाप AB द्वारा केंद्र पर बना कोण AOB = x तथा परिधि के बिन्दु पर बना कोण C है|

अत: $\angle C = \frac{1}{2}x^\circ$..................(1)

इसी प्रकार $\angle D = \frac{1}{2}y^\circ$..........................(2)

समी. (1) तथा (2) को जोड़ने पर



$$\angle C + \angle D = \frac{1}{2}[x + y]$$

चूंकि केंद्र पर बने सभी कोणो का योग 360° होता है

अत: $x + y = 360^\circ$

$$\angle C + \angle D = \frac{1}{2}(360) = 180^\circ$$

चूंकि चतुर्भुज के चारो कोणो का योग 360 होता है|

अत $\angle A + \angle B = 360 - 180 = 180$

प्रमेय - चक्रीय चतुर्भुज *की* एक भुजा बढाने पर बनाने वाला बहिष्कोण उसके अंतराभिमुख कोण के बराबर होता है|

दिया है - एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD जिसकी भुजा AB को E तक आगे बढ़ाया गया है| इस प्रकार बना बहिष्कोण ∠3 है

सिद्ध करना है - $\angle CBE = \angle CDA$

या $\angle 3 = \angle 5$

उपपति - $\angle 2 + \angle 3 = 180$.................(1)

चक्रीय चतुर्भुज के अभिमुख कोण संपूरक (180°) होते है|

$\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$.................(2)

समी. (1) व (2) की तुलना करने पर

$$\angle 2 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 5$$

या $\angle 3 = \angle 5$

बहिष्कोण = अंतराभिमुख कोण

प्र. AB और CD वृत की दो जीवाएँ इस प्रकार है कि AB = 10 सेमी, CD = 24 सेमी और AB ∥ CD है। AB व CD के बीच की दूरी 17 सेमी. है। वृत की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

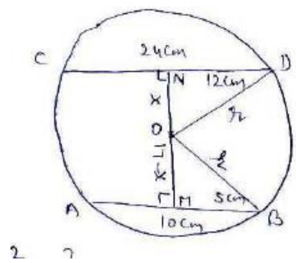
हल:– दिया है । MN = 17 cm

माना ON = X

OM = 17 - X

ΔOND में $r^2 = x^2 + 12^2$ –(1)

ΔOMB में $r^2 = (17-x)^2 + 5^2$ –(2)



(1) में से (2) घटाने पर

या $x^2 - (17-x)^2 + 12^2 - 5^2 = 0$

या $x^2 - (289 + x^2 - 34x) + 144 - 25 = 0$

या $34x = 170$

$x = \frac{170}{34} = 5cm$

x का मान (1) में रखने पर $R^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

$R^2 = 13^2$

$R = 13cm$

प्र. आकृति में AOB वृत का व्यास है तथा C, D और E अर्धवृत पर कोई तीन बिन्दु है। $\angle ACD + \angle BED$ का मान ज्ञात करो ।

हलः– A को E से मिलाने पर ।

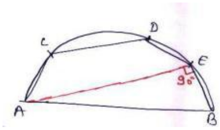
$\angle AEB = 90^0$ – (1) (अर्द्धवृत में बना कोण समकोण होता है ।

तथा $\angle ACD + \angle AED = 180^0$ –(2) (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण ।

(1) + (2) से

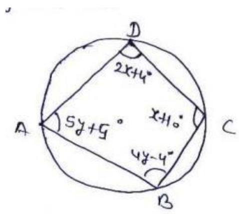
$\angle ACD + \angle AED + \angle AEB) = 180^0 + 90^0$

$\angle ACD + \angle BED = 270^0$



प्रश्नः– ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। X और Y ज्ञात करो ।

हल– चित्रानुसार



$\angle A + \angle C = 180^0$

$X + 10 + 5y + 5 = 180^0$

$x + 5y + 15 = 180^0$

$x + 5y + 165^0$ ----- (1)

तथा $\angle B + \angle D = 180^0$

$2x + 4 + 4y - 4 = 180^0$

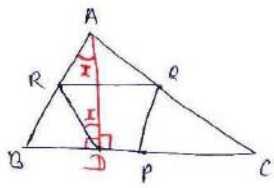
$2x + 4y = 180^0$

$x + 2y = 90^0$

(1) व (2) से $x = 40^0$, $Y = 25^0$ ----- (2)

प्रश्न– यदि P,Q,R त्रिभुज ABC की भुजा BC, CA तथा AB भुजाओं के मध्य बिन्दु है तथा AD, शीर्ष A से BC पर लम्ब है। सिद्ध करो । PQR D एक चक्रीय चतुर्भुज है।

हलः– RQPB समान्तर चतुर्भुज है।



$\therefore \angle PQR = \angle B$ - (1)

तथा समकोणΔABD में R, कर्ण का मध्य बिन्दु है।

$AR = RD$

$\angle RAD = \angle RDA = X$ (2)

चतुर्भुज RQPD में सम्मुख कोण ।

$\angle RDP + \angle RQP = x + 90^0 + B$

$= x + B + 90^0$

$= 90^0 + 90^0$

$= 180^0$ **सम्म्मुख कोण सम्पुरक है अत :PQRD एक चक्रिय चतुर्भुज है .**

Note: ΔABD में

$x + \angle LB + 90^0 = 180^0$

$x + \angle LB = 90^0$

अध्याय - 13

वृत्त एवं स्पर्श रेखाये

अतिलघुरात्मक 1 प्रश्न (1 अंक)

स्मरण रखने हेतु महत्वपूर्ण प्रश्न

1. *एक वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाये खिची जा सकती है ?*

उत्तर - अनंत

2. *एक वृत पर स्थित बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखाये खिची जा सकती है।*

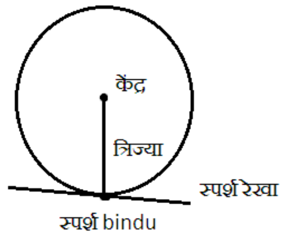
उत्तर - एक

3. *वृत्त के दो बिन्दुओ पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को क्या कहते है।*

उत्तर - छेदकरेखा

4. *वृत्त की त्रिज्या स्पर्श रेखा के लबवत होती है ।*

उत्तर - परस्पर 90° का कोण बनती है।



5. *वृत्त तथा स्पर्श रेखा के उभयनिष्ट बिन्दु को क्या कहते है।*

उत्तर - स्पर्श बिन्दु

6. *वृत की स्पर्श रेखा वृत्त से कितने बीन्दुओ पर मिलती है।*

उत्तर - एक

7. *एक बिन्दु से वृत पर खिची गई स्पर्श रेखा की लंबाई ज्ञात कीजिये , जबकि बिन्दु की वृत्त के केंद्र से दूरी 13 सेमी. है और वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. है*

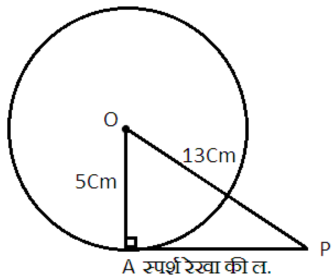
उत्तर - त्रिभुज OAP एक समकोण त्रिभुज है

बोधायन प्रमेय से

(कर्ण $)^2$ = (लंब $)^2$ + (आधार $)^2$

$(OP)^2 = (OA)^2 + (AP)^2$

$AP^2 = (OP)^2 + (OA)^2$



स्पर्श रेखा की लंबाई

$$AP = \sqrt{(OP)^2 - (OA)^2}$$

$$= \sqrt{(13)^2 - (5)^2}$$

$$= \sqrt{169 - 25}$$

$$= \sqrt{144}$$

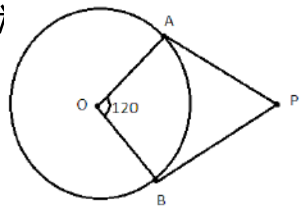
= 12 सेमी.

नोट - इसी तरह यदि त्रिज्या एवं वृत्त के केंद्र से बाहय बिन्दु की दूरी भी ज्ञात कर सकते है।

8. *वृत्त के बाहर बिन्दु से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाये खीची जा सकती है*

उत्तर - दो

9. *किसी वृत्त पर बाह्य बिन्दु से खीची गई स्पर्श रेखाओ के मध्य बना कोण उसी स्पर्श बिन्दुओ से गुजरने वाली त्रिज्याओ के मध्य बने कोण के संपूरक हो।*



उत्तर - $\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$

$$\angle APB = 180^\circ - \angle AOB$$

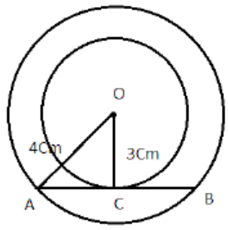
$$= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

10. *दो संकेद्रीय वृतों की त्रिज्याये क्रमशः 5 सेमी. तथा 3 सेमी. है बड़े वृत्त की उस जीवा की*

लंबाई ज्ञात कीजिये जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है

उत्तर – वृत्त का केंद्र , 3 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त की स्पर्श रेखा/बड़े वृत्त की जीवा OC $\perp$ AB

त्रिभुज ACO एक समकोण त्रिभुज है|



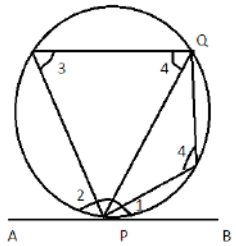
बोधायन प्रमेय $OA^2 = OC^2 + AC^2$

$$AC = \sqrt{OA^2 - OC^2}$$

$$\sqrt{(5)^2 - (3)^2}$$

$$\sqrt{25-9}\, 4 =$$

11. *यदि वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से एक जीवा खीची जाय तो इस जीवा द्वारा दी गई स्पर्श रेखा से बनाए गए कोण क्रमशः उसी जीवा द्वारा एकांतर वृतखंडों मे बने कोण के बराबर होता है|*



AB = वृत्त की स्पर्श रेखा

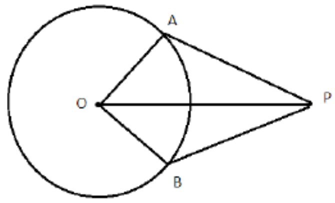
PQ = जीवा

$\angle 1 = \angle 3$

$\angle 2 = \angle 4$

प्रमेय - वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से वृत्त पर *खीची* गई दो स्पर्श रेखाये लंबाई मे समान होती है|

(1)दिया है - एक वृत्त जिसका केंद्र O पर बाहय बिन्दु P से PA तथा PB स्पर्श रेखाये खिची गई है|



(2) सिद्ध करना है - $PA = PB$

रचना - OA , OB , तथा OP को मिलाया

उपपति - समकोण त्रिभुज OAP तथा त्रिभुज OBP मे -

भुजा OA = भुजा OB (एक ही वृत्त की त्रिज्याये)

भुजा OP = भुजा OP (उभयनिष्ट)

$\angle OAP = \angle OBP$ (दोनों समकोण है)

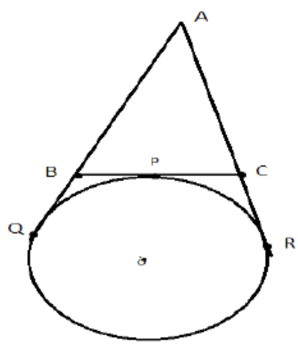
अत: $\Delta OAP \cong \Delta OBP$

भुजा AP = भुजा BP इति सिद्धम

EX. एक वृत्त त्रिभुज ABC की भुजा BC को P पर स्पर्श करता है तथा AB व AC को आगे बढ़ाने पर क्रमशः Q व R पर स्पर्श करता है तो सिद्ध कीजिये की

$AQ = \frac{1}{2}$ (त्रिभुज ABC की परिमति)

हल - हम जानते है की किसी बाहय बिन्दु से वृत्त पर *खीची* गई स्पर्श रेखाये लंबाई मे समान होती है|



अत: AQ = AR

इसी प्रकार BP = BP तथा CP = CR ----- (1)

अब R.H. S. $= \frac{1}{2}[AB + BC + CA]$

$$= \frac{1}{2}[AQ - BQ + BP + CP + AR - CR]$$

$$= \frac{1}{2}[AQ - BP + BP + CR + AQ - CR]$$

$$= \frac{1}{2}[2AQ] = AQ = L.H.S.$$

अध्याय - 14

रचनाएं

इस अध्याय से 3 अंक का एक प्रश्न आता है

1. वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से स्पर्श रेखा खीचना -

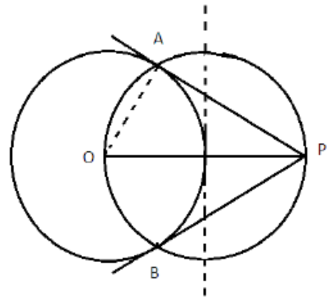
विधि - (1) सर्वप्रथम दी गई त्रिज्या का वृत्त बनाइये|

(2) वृत्त के केंद्र से दी गई माप का रेखाखण्ड OP खीचिए|

(3) OP रेखा का लम्ब अर्द्धक करके OP का मध्य बिन्दु M ज्ञात कीजिये| अब M को केंद्र मानकर और OM को त्रिज्या लेकर एक वृत्त खिचिए जो पहले को दो जगह प्रतिच्छेद करेगा| इनको A व B नाम दीजिये .

(4)AP तथा BP को मिलाये यही दो स्पर्श रेखाए है जो मापने पर बराबर होंगी

Ex. 1 एक 3 Cm त्रिज्या का वृत्त खीचिए जिनके केंद्र O से 5 Cm दूर स्थित बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाए खीचिए?



चित्रानुसार OA = त्रिज्या = 3 Cm

OP = 5 Cm

स्पर्श रेखा की लंबाई की गणना द्वारा सत्यापन

$\therefore \angle OAP = 90^\circ$

समकोण त्रिभुज OAP मे $AP^2 = OP^2 - OA^2$

$= (5)^2 - (3)^2$

$= 25 - 9 = 16$

$AP = \sqrt{16} = 4Cm$

अत: स्पर्श रेखा $AP = BP = 4Cm$

(3) वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाए खीचना, जिनके मध्य का कोण दिया गया हो -

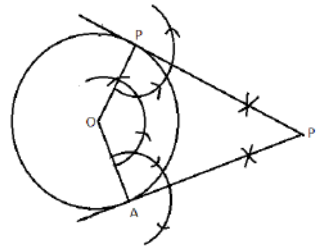
विधि - (1) सर्वप्रथम दी गई त्रिज्या का एक वृत्त खीचिए|

(2) स्पर्श रेखाओ के मध्य जितना कोण दिया गया है उसे 180° मे से घटाकर ,जो आये उतने डिग्री का वृत्त के केंद्र O पर कोण बनाते हुए त्रिज्या OA व OB खीचे|

(3) वृत्त की परिधि पर स्थित बिन्दु A व B पर 90° के कोण बनाए और 90° के कोण को बिन्दु A से तथा B से मिलाते हुए आगे बढ़ते है, जंहा मिले वहा बिदु P अंकित करे|

$\angle APB$ बांछित कोण होगा तथा PA , PB स्पर्श रेखाए |

Ex. किसी बिन्दु O पर 2.4 Cm त्रिज्या लेकर वृत्त बनाइये इसमे 60° का कोण बनती हुई दो स्पर्श रेखाए खीचिए |



(4) त्रिभुज के परिकेन्द्र की स्थिति एवं परिगत वृत्त की रचना|

परिकेन्द्र - किसी त्रिभुज की भुजाओ के लम्ब अर्द्धक का सगमन बिन्दु परिकेन्द्र कहलाता है|

विधि - (1) सर्वप्रथम प्रश्न मे दी गई माप के आधार पर त्रिभुज की रचना कीजिये|

(2) अब त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओ का लम्ब समद्विभाजन करो जहाँ दोनों भुजाओ के लम्ब अर्द्धक मिले वह परिकेन्द्र O होगा|

(3) O को केंद्र मानकर , OA को त्रिज्या मानकर वृत्त खीचिए जो त्रिभुज के तीनों शीर्षो से होकर गुजारेगा|

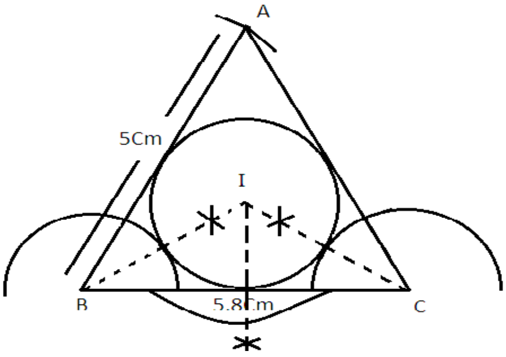
Trick - परिगत अर्थात जो बाहर से गुजरे अत: बाहर की भुजाओ का लम्ब अर्द्धक करो| अंदर कोण होते है जिनके अर्द्धक का संगमन बिन्दु अंत: केंद्र कहलाता है| अत:केंद्र को केंद्र मानकर खिचा गया वृत्त अंतर्गत वृत्त कहलाता है| जो त्रिभुज की भुजाओ को अंदर से स्पर्श करता है|

Ex. त्रिभुज ABC के अंतर्गत वृत्त की रचना कीजिये , जबकि

$BC = 5.8Cm$

$AB = 5Cm$

$\angle B = 60^\circ$



पाठ – 15

वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल
(Circumference of a Circle and Area)

हम विभिन्न आकृतियों जैसे त्रिभुज, वर्ग, आयत, समान्तर चतुर्भुज आदि के परिमाप एवं क्षेत्रफल ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में कुछ वृत्ताकार आकृतियों के परिमाप एवं क्षेत्रफल से सम्बन्धित जानकारी प्राप्त करेंगे। हम दैनिक जीवन में अनेक वृत्ताकार आकृतियों जैसे चूड़ी (Bangles) सिक्का, चपाली, वृत्ताकार रास्ते आदि के सम्पर्क में आते हैं। अतः इन आकृतियों के क्षेत्रफल (विशेषकर वृत्तखण्ड, त्रिज्यखण्ड) एवं उनके परिमाप से सम्बन्धित विभिन्न समस्याओं को हल करने की कुछ विधियों का अध्ययन हम इस अध्याय में करने का प्रयास करेंगे।

वृत्त की परिधिः

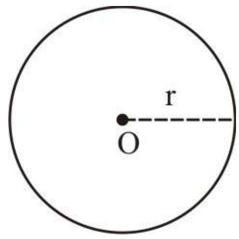
वृत्त किसी बिन्दु का बिन्दु पथ होता है जो किसी समतल में इस प्रकार गति करता है कि समतल में स्थित किसी नियत बिन्दु से इसकी दूरी सदैव समान रहे।

नियत बिन्दु, वृत्त का केन्द्र कहलाता है जबकि नियत (समान) दूरी (केन्द्र से) वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। जिसे r से व्यक्त करते है।

वृत्त के अनुदिश एक पूरे चक्कर में तय की गई दूरी को वृत्त की परिधि कहते है।

ध्यान रहे वृत्त समतल में बनी आकृति है जबकि वृत्त की परिधि एक लम्बाई है।

वृत्त की परिधि व व्यास का अनुपात एक अचर राशि होती है जिसे π द्वारा व्यत किया जाता है।



$$\pi = \frac{\text{वृत्त की परिधि}}{\text{व्यास}} = \frac{C}{2r} \Rightarrow \boxed{C = 2\pi r}$$

याद रखने की **ज्तपबा**

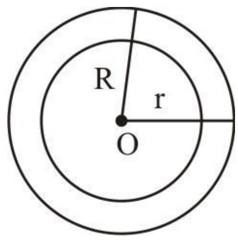
''चल मेरे घोड़ा चल मेरे यार, वृत्त की परिधि $2\pi r$''

अतः यदि किसी वृत्त की त्रिज्या r हो तब –

(1) परिधि $= 2\pi r$ या πd यहाँ $d = 2r$, वृत्त का व्यास है।

(2) वृत्त का क्षेत्रफल (A) = πr^2

(3) अर्द्ध वृत्त का (Semi circle) क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2}{2}$



(4) वृत्त के एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2}{4}$

दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

(Area Enclosed by Two Concentric Circles)3

ऐसे वृत्त जिसका केन्द्र एक ही हो, संकेन्द्रीय वृत्त कहलाते है। यदि R एवं r दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएं हैं $R > r$ तो दोनों वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R+r)(R-r)$$

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Some Useful Results)

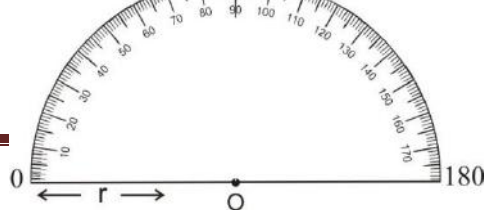
(1) किसी पहिये द्वारा एक बार घूमने में तय की गई दूरी, उसकी (पहिए) की परिधि/परिमाप के बराबर होती है।

(2) पहिए द्वारा 1 मिनट में लगाए गये चक्करों की संख्या = $\frac{\text{एक मिनट में तय दूरी}}{\text{परिधि}}$

उदाहरण 1 : *एक चाँदें* (Semi-Circular Protector) *का परिमाप 108 सेमी है। चाँदें का व्यास ज्ञात कीजिये।*

हल : माना चाँदें की त्रिज्या r है, तब

परिमाप = 108



$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2\pi r) + 2r = 108$$

$$\Rightarrow \pi r + 2r = 108$$

$$\frac{22}{7}r + \frac{2r}{1} = 108 \qquad \Rightarrow \qquad 36r = 108 \times 7 \;\Rightarrow\; r = \frac{108 \times 7}{36} = 21 \text{ cm}$$

अतः चाँदे का व्यास $= 2r = 2 \times 21 = 42 \text{ cm}$

उदाहरण 2 : *एक साइकिल का पहिया 11 किमी चलने में 5000 चक्कर लगाता है तो पहिये का व्यास ज्ञात कीजिए।*

हल : पहिये द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी अर्थात् परिधि $= \dfrac{\text{चली गई दूरी}}{\text{चक्करों की संख्या}}$

$$\Rightarrow 2\pi r = \frac{11KM}{5000} = \frac{11 \times 1000 \times 100 \text{ cm}}{5000}$$ (1 किमी = 1000 मी.)

(1 मीटर = 100 सेमी)

$$\Rightarrow 2\pi r = 220 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow r = \frac{220}{2\pi} = \frac{220}{2 \times 22} \times 7 = 35 \text{ cm}$$

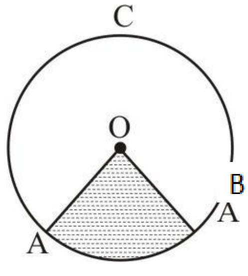
व्यास $= 2r = 2 \times 35 = 70 \text{ cm}$ (व्यास $= 2 \times$ त्रिज्या)

वृत्त के त्रिज्यखण्ड एवं वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

किसी भी वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे हुए क्षेत्र को वृत्त का त्रिज्यखण्ड कहते हैं।

माना दिये गये चित्रानुसार एक वृत्त है जिसका केन्द्र 'O' एवं त्रिज्या r है। माना A, B और C तीन बिन्दु वृत्त की परिधि पर है। यह वृत्त दो त्रिज्यखण्ड़ों, OBA और OBCA में विभाजित है। इनमें प्रत्येक त्रिज्यखण्ड के लिए अलग–अलग चाप, सीमा के रूप में हैं। त्रिज्यखण्ड व्ठ। के लिए चाप AB तथा OBCA के लिए चाप ABC है। लघु त्रिज्यखण्ड OBA के लिए माना $\angle AOB = \theta$, जब कोण θ का मान बढ़ता है तो चाप की लम्बाई भी उसी अनुपात में बढ़ेगी। जब यह θ, 180^o का हो जायेगा तो चाप AB, अर्द्धवृत्त की परिधि होगी। अर्थात् चाप AB की लम्बाई $= \frac{1}{2}$ (परिधि)

$\because$ केन्द्र पर 180^o का कोण अन्तरित करने वाले चाप की लम्बाई $= \pi r$



$\therefore$ केन्द्र पर θ कोण अन्तरित करने वाले चाप की लम्बाई $\frac{\pi r}{180}\theta$

अर्थात् $\lfloor = \dfrac{\theta}{180}(\pi r)$

या $\lfloor = \dfrac{\pi}{180} \times \dfrac{2\pi r}{2} = \dfrac{\theta}{360}$ (परिधि)

इसी प्रकार चाप जब 180^o का कोण बनाता है तो संगत त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \text{ (वृत्त का क्षेत्रफल) } = \frac{\pi r^2}{2}$$

$\therefore$ θ कोण अन्तरित करने पर त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2}{2 \times 180}\theta$

या $A = \dfrac{\theta}{360}$ (वृत्त का क्षेत्रफल)

अब $A = \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$

या $$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{180} \times \pi r\right) r$$

या $A = \frac{1}{2}\ell r$ .... (iii) [using eq (1)]

Some Useful Results to Remember

(1) घड़ी के मिनट की सूई 60 मिनट में 360^o के कोण से घूमती है।

घड़ी के मिनट की सूई 1 मिनट में 6^o के कोण से घूमेगी।

(2) घड़ी में घण्टे की सूई 12 घण्टे में 360^o के कोण से घूमती है।

घड़ी में घण्टे की सूई 1 घण्टे में 30^o के कोण से घूमेगी।

(3) क्षेत्रफल की इकाई सेमी^{2} वर्ग मीटर (मी^{2}) होती है।

घड़ी में घण्टे की सूई 1 मिनट में $\frac{1}{2}^o$ के कोण से घूमेगी।

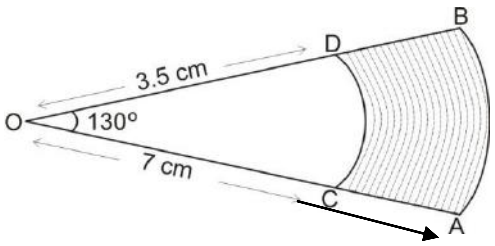
उदाहरण 3: *त्रिज्या 21 सेमी. वाले वृत्त का चाप केन्द्र पर 60^0 का कोण अन्तरित करता है। ज्ञात कीजिए–*

(1) चाप की लम्बाई *(2) चाप द्वारा बनाये गये त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल*

हल : चाप की लम्बाई $L = \frac{2\pi r\theta}{360} = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times \frac{60}{360} = 22$ सेमी

चाप द्वारा बनाये गये त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2\theta}{360} = \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times \frac{60}{360} = 231$ सेमी

उदाहरण 4: *चित्र में दो संकेन्द्रीय वृत्तों जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः 7 सेमी एवं 3.5 सेमी के भागों को दर्शाया गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।*



हल : छायांकित भाग का क्षेत्रफल त्र त्रिज्यखण्ड OAB का क्षेत्रफल – त्रिज्याखण्ड OCD का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi\theta}{360}\left[7^2 - 3.5^2\right]$$

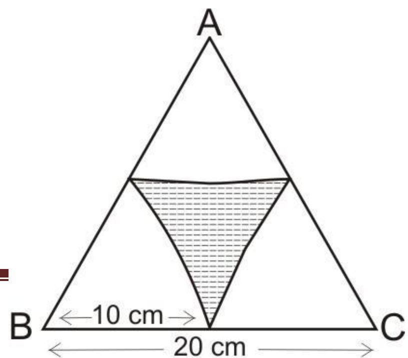
$$= \frac{22}{7} \times \frac{30}{360}\left[7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right]$$

$$= \left[3.5 = \frac{7}{2}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{30}{360}\left[49 - \frac{49}{4}\right] = \frac{22}{7} \times \frac{30}{360} \times 49\left[1 - \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{30}{360} \times 49 \times \frac{3}{4} = \frac{77}{8} = 9.625 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 5: *दी गई आकृति में ABC एक समबाहु त्रिभुज है। जिसकी एक भुजा 20 सेमी है। त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष से 10 सेमी. त्रिज्या के चाप खींचे गये हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।*



हल : छायांकित भाग का क्षेत्रफल

समबाहु ΔABC का क्षेत्रफल – तीन त्रिज्यखण्डों का क्षेत्रफल

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ भुजा}^2 - 3\left(\frac{\pi r^2\theta}{360}\right)$$

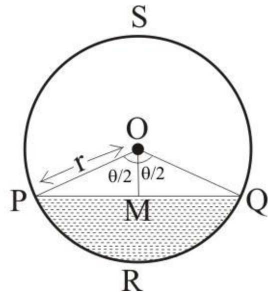
$$= \quad \frac{\sqrt{3}}{4}\times 20^2 \; - \quad 3\times\frac{22}{7}\times 10\times 10\times\frac{60}{360}$$

(समबाहु Δ का प्रत्येक अंतः कोण 60^o होता है)

$= \quad 173 - 157$ (समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$)

$$= \quad 16 \text{ cm}^2$$

वृत्तखण्ड (Segment) का क्षेत्रफल



वृत्त की प्रत्येक जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करती है। बड़े भाग को दीर्घ वृत्तखण्ड व छोटे भाग को लघु वृत्तखण्ड कहते है।

चित्र से – यदि $\angle POQ = \theta$ है

तब $\angle POM = \angle QOM = \frac{\theta}{2}$

(1) लघु वृत्तखण्ड PRQ का क्षेत्रफल त्र त्रिज्यखण्ड व्व्फ का क्षेत्रफल – त्रिभुज POQ का क्षेत्रफल

$$= \quad \frac{\pi r^2\theta}{360} - \frac{1}{2} PQ\times OM$$

$$= \quad \frac{\pi r^2\theta}{360} - \frac{1}{2}\times 2PM\times OM$$

समकोण ΔOMP से

$$\text{Sin}\frac{\theta}{2} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{PM}{OP} \Rightarrow \boxed{PM = OP\ \sin\frac{\theta}{2} = r\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\text{तथा } \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\text{आ}}{\text{कर्ण}} = \frac{OM}{OP} \Rightarrow \quad OM = OP\ \cos\frac{\theta}{2} = r\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\text{लघु वृत्तखण्ड PRQ का क्षेत्रफल } = \frac{\pi R^2\theta}{360} - r\sin\theta/_2 \times r\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\pi r^2\theta}{360} - \frac{r^2}{2}\sin\theta\left[\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

उदाहरण 6: ***14 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा वृत्त के केन्द्र पर 30^0 का कोण बनाती है। इससे बनने वाले लघु वृत्तखण्ड एवं दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।***

हल : (1) लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2\theta}{360} - \frac{r^2}{2}\sin\theta$

$$= \frac{22}{7}\times\frac{14\times 14\times 30^o}{360} - \frac{14\times 14}{2}\sin 30^o$$

$$= \frac{616}{12} - \frac{14\times 14}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$51.33 - 49 = 2.33 cm^2$$

(2) दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल त्र वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

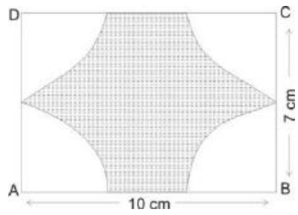
$$= \pi r^2 - 2.33$$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 - 2.33$$

$$= 616 - 2.33$$

$$= 613.67 cm^2$$

उदाहरण 7: ***दी गई आकृति में ABCD एक आयत है। भुजा AB = 10 सेमी BC = 7 सेमी है। आयत के प्रत्येक शीर्ष पर 3.5 सेमी त्रिज्या के वृत्त खींचे गये है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।***



हल : छायांकित भाग का क्षेत्रफल

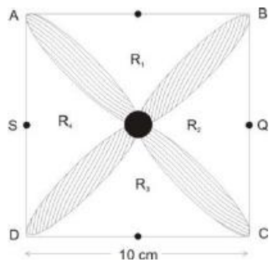
आयत ABCD का क्षेत्रफल – चारों शीर्षों पर बने वृत्तों के त्रिज्यखण्डों का क्षेत्रफल

$$(10 \times 7) - 4\frac{\pi r^2 \theta}{360}$$ (आयत का क्षेत्रफल = ल x चौ)

$$70 - 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times \frac{90}{360}$$

$$70 - 38.5 = 31.5 cm^2$$ ($\because$ आयत के प्रत्येक अन्तःकोण का मान 90^0 होता है)

उदाहरण 8: ***दी गई आकृति में छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जहाँ ABCD, भुजा 10 सेमी का एक वर्ग है तथा इस वर्ग की प्रत्येक भुजा को व्यास मानकर अर्द्धवृत्त खींचें गये है। ($\pi = 3.14$ लें)***



हल : सबसे पहले जो भाग छायांकित नहीं है, उसको R_1, R_2, R_3 व R_4 मान लेते हैं।

अब R_1 का क्षेफत्रल + R_3 का क्षेत्रफल

= वर्ग ABCD का क्षेत्रफल – Q व S को केन्द्र मानकर खींचे गये अर्द्ध वृत्तों का क्षेत्रफल

$$= \left[10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times 3.14 \times 5^2\right] \qquad \left[\because \text{Radius} = AP = \frac{10}{2} = 5cm\right]$$

$$= (100 - 3.14 \times 25) = 100 - 78.5 = 21.5 cm^2$$

इसी प्रकार R_2 का क्षेत्रफल + R_4 का क्षेत्रफल = $21.5\ cm^2$

$\therefore$ छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= वर्ग ABCD का क्षेत्रफल – (R_1 का क्षेत्रफल + R_2 का क्षेत्रफल + R_3 का क्षेत्रफल + R_4 का क्षेत्रफल)

$$= (100 - 2 \times 21.5) = 57 cm^2$$

अध्याय – 16

पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

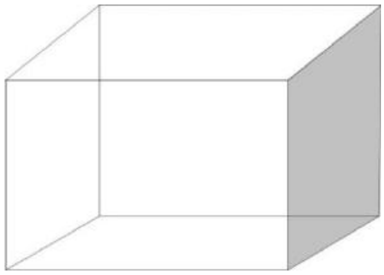
(Surface Areas and Volumes)

प्रस्तावना (Introduction) – ईट, माचिस की डिब्बी, कमरा पानी की टंकी क्रिकेट गेंद आदि विभिन्न प्रकार की ठोस आकृतियाँ है। ठोस आकृतियाँ एक समतल ये आकाश (Space) में भी स्थित होती है अतः इसे त्रिविमीय (Three Dimensional) आकृतियों कहते हैं।

किसी ठोस आकृति के पृष्ठीय क्षेत्रफल से तात्पर्य समस्त पृष्ठों के क्षेत्रफलों के योग से है तथा किसी ठोस द्वारा आकाश (Space) में जितना स्थान घेरा जाता है वह उसका आयतन कहलाता है।

(1) घन और घनाभ (Cube and Cuboid) – चौक का डिब्बा, ईंट, माचिस की डिब्बी, कमरा आदि घनाभ के उदाहरण है। इसमें समान्तर फलकों के तीन युग्म है।

यदि किसी घनाभ की लम्बाई को चौड़ाई को तथा ऊँचाई को से व्यक्त किया जाये तब–



(i) घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\left[\ell b + bh + \ell h\right]$ वर्ग इकाई

(ii) घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई

(लम्बाई x चौड़ाई) x ऊँचाई

$= \ell bh$ घन इकाई

(iii) घनाभ का विकर्ण $= \sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$ इकाई

(iv) कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल $= \ell h + \ell h + bh + bh$

घन : जब घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान है तब, इसे घन कहा जाता है। घन के सभी 6 पृष्ठ वर्गाकार होते है।

(i) घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 वर्गाकार पृष्ठों का क्षेत्रफल

= 6 भुजा^{2} वर्ग इकाई

(ii) घन का आयतन = भुजा x भुजा x भुजा = भुजा^{3} घन इकाई

(iii) घन का विकर्ण $\sqrt{\ell^2 + \ell^2 + \ell^2} = \sqrt{3}\ell = \sqrt{3}$ भुजा इकाई

बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन (Surface Area and Volume of a Right Circular Cylinder)

(i) प्रत्येक सिरे का क्षेत्रफल (area of each end) $= \pi r^2$

(ii) वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल (Curved Surface Area) = Perimeter of base x height

$= 2\pi r \times h$

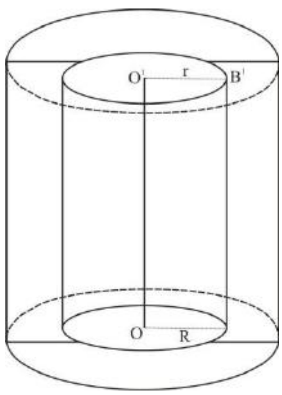
$= 2\pi rh$

(iii) बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल

वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + वृत्तीय पृष्ठों का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + = 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$



(iv) बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई $= \pi r^2 h$

खोखला बेलन (Hollow Cylinder)

(i) प्रत्येक वृत्तीय सिरे का क्षेत्रफल $= \pi(R^2 - r^2)$

(ii) वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

बाह्य पृष्ठीय क्षेत्रफल + आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल

= External Surface area + Internal Surface Area

$= 2\pi Rh + 2\pi rh$

$= 2\pi h(R + r)$

(iii) सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi(R^2 - r^2)$ (बाह्य त्रिज्या R)

$= 2\pi h(R + r) + 2\pi(R + r)(r - r)$ (अन्तः त्रिज्या r)

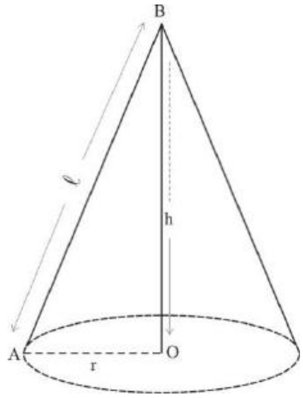
$= 2\pi(R + r)(R + h - r)$

(iv) आयतन = बाहरी आयतन – आन्तरिक आयतन

$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$

$= \pi h(R^2 - r^2)$

शंकु (Right Circular Cone)



यदि शंकु की ऊँचाई h, त्रिर्यक ऊँचाई ℓ तथा त्रिज्या r है तो –

(i) $\ell^2 = r^2 + h^2$

(ii) शंकु का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $\pi r\ell$ वर्ग इकाई

(iii) शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= वक्र पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल

$= \pi r\ell + \pi r^2 = \pi r(\ell + r)$ वर्ग इकाई

(iv) शंकु का आयतन, समान ऊँचाई एवं समान त्रिज्या वाले बेलन के आयतन का एक तिहाई होता है।

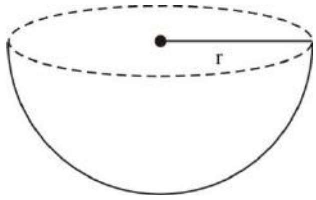
शंकु का आयतन $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

गोला (Sphere) : पूर्ण फूला हुआ फुटबॉल, क्रिकेट बॉल, गोले के उदाहरण है।

(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

(ii) गोले का आयतन $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

अर्द्ध–गोले (Hemi-Sphere) के लिए –



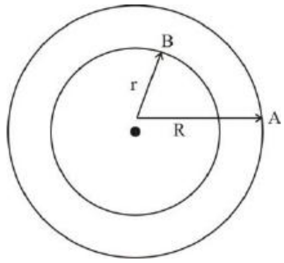
(i) पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

(ii) सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

(iii) आयतन $= \dfrac{2}{3}\pi r^3$

गोलीय कोश (Spherical Shell)

यदि गोलीय कोश की बाहरी त्रिज्या R एवं भीतरी त्रिज्या r है तब–



(i) बाह्य पृष्ठीय क्षेत्रफल (Outer Surface Area)

(ii) गोलीय कोश का आयतन (Volume of Spherical shell)

$$= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$$

उदाहरण 9: तीन घन जिनकी भुजायें क्रमशः 3 सेमी, 4 और 5 सेमी है को पिघलाकर एक नया घन बनाया जाता है। नये घन की भुजा तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना नये घन की भुजा x cm है।

नये घन का आयतन = तीनों घनों के आयतनों का योग

$$x^3 = (3)^3 + (4)^3 + (5)^3 = 27 + 64 + 125$$

$$x^3 = 216 = 6^3$$

$$\Rightarrow x = 6cm$$

नये घन की भुजा = 6 सेमी

नये घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 भुजा^{2} $6(6)^2 = 6 \times 36 = 216cm^2$

उदाहरण 10: एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात 5 : 3 : 2 है यदि घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 558 सेमी^{2} है तो उसकी कोरों की माप ज्ञात कीजिए।

हल : माना घनाभ की लम्बाई $\ell = 5x$

चौड़ाई $b = 3x$ तथा $h = 2x$ ऊँचाई है।

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 558

$$2(\ell b + bh + \ell h) = 558$$

$$\Rightarrow 15x^2 + 6x^2 + 10x^2 = 279$$

$$31x^2 = 279$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{279}{31} = 9 \qquad \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

अतः लम्बाई $\ell = 5 \times 3 = 15$ सेमी

चौड़ाई $b = 3 \times 3 = 9$ सेमी.

ऊँचाई $h = 2 \times 3 = 6$ सेमी.

उदाहरण 11: यदि एक बेलन का आयतन 448π घन सेमी और ऊँचाई 7 सेमी है तो बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल: बेलन का आयतन $= 448\pi$

या $\pi r^2 h = 448\pi$

$$r^2 = \frac{448}{h} = \frac{448}{7} = 64$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी}$$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(h+r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8[7+8]$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8 \times 15 = \frac{5280}{7} = 754.28 cm^2$$

उदाहरण 12: एक अर्द्धगोलाकार कटोरा जिसकी अन्तःत्रिज्या 19 सेमी, पूरा द्रव से भरा हुआ है। इस द्रव को 3 सेमी त्रिज्या एवं 6 सेमी ऊँचाई की कितनी बोतलों में भरा जा सकता है?

हल : अर्द्ध गोलाकार कटोरे में भरे द्रव का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi(18)^3 \text{ घन सेमी}$$

एक बेलनाकार बोतल का आयतन $= \pi r^2 h = \pi(3)^2 \times 6$ घन सेमी

माना कटोरे के द्रव को खाली करने के लिए n बोतलों की आवश्यकता है।

$\therefore$ n बोतलों का आयतन = कटोरे के द्रव का आयतन

$$n(\pi(3)^2 \times 6) = \frac{2}{3}\pi(18)^3$$

$$\Rightarrow n = \frac{2\pi \times 18^3}{3\pi \times 3^2 \times 6} = \frac{2 \times 18 \times 18 \times 18}{3 \times 9 \times 6} = 72$$

अतः कटोरे के द्रव को खाली करने के लिए 72 बोतलों की आवश्यकता होगी।

उदाहरण 13: दो घन जिनमें प्रत्येक का आयतन 64 घन सेमी है, को एक सिरे से जोड़ दिया जाता है। इस प्रकार बने घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात करो।

हल : माना प्रत्येक घनाभ की लम्बाई x cm है तब,

आयतन = 64 cm^3

$\Rightarrow x^3 = 64 \quad \Rightarrow x^3 = 4^3$

$$\Rightarrow \boxed{x = 4} \text{cm}$$

यदि दोनों घनों की लम्बाई के अनुदिश जोड़ा जाए तो–

इस प्रकार बने घनाभ की लम्बाई $\ell = 4 + 4 = 8 \text{cm}$

चौड़ाई $b = 4 \text{cm}$

और ऊँचाई $h = 4 \text{cm}$

(i) बने घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + \ell h)$

$$= 2(8 \times 4 + 4 \times 4 + 8 \times 4)$$

$$= 2[32 + 16 + 32] = 2 \times 80 = 160 cm^2$$

(ii) घनाभ का आयतन $= \ell . b . h$

$$= 8 \times 4 \times 4 = 128 cm^3$$

अध्याय – 17

केन्द्रिय प्रवृत्ति के माप

(Measures of Central Tendancy)

इस अध्याय मे से बोर्ड परीक्षा मे एक मुख्य प्रश्न आता है , जिसमे माध्य , माध्यक या बहुलक ज्ञात करने से संबन्धित होता है |

माध्य / समांतर माध्य ($\bar{x}$)

सूत्र $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

सूत्र से ध्यान मे रखा जाता है की हमे प्रश्नो मे किन - किन स्तंभो को शामिल करना है |

जैसे - सूत्र मे $\sum f_i$ है जिसके लिए हमे बारंबारता वाले स्तम्भ का योग करना है |

सूत्र मे $\sum f_i x_i$ है जिसके लिए हमे $f_i x_i$ का योग करना है , लेकिन प्रश्न मे $f_i x_i$ का स्तम्भ नहीं है|

अत: इसे हल करते समय सारणी मे एक नया स्तम्भ $f_i x_i$ बनाएगे जो कि f_i वाले स्तम्भ को x_i वाले स्तम्भ से संगत गुणा करके बनाते है|

नोट - यदि प्रश्न मे वर्ग अंतराल दिया है तो इस अंतराल से x_i वाला स्तम्भ बनाए

उदाहरण 1 समांतर माध्य ज्ञात कीजिये ?

वर्ग - अंतराल	0 - 10	10 - 20	20 -30	30 -40	40 - 50
बारंबारता	3	2	7	3	5

वर्ग अंतराल	f_i	मध्यमान x_i	$f_i x_i$
0 - 10	3	5	15
10 - 20	2	15	30
20 - 30	7	25	175
30 - 40	3	35	105
40 - 50	5	45	225
योग	$\sum f_i$ =20		$\sum f_i x_i$ = 550

हल – समांतर माध्य $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

मान रखने पर $\bar{x} = \dfrac{550}{20} = \dfrac{55}{2}$ $\bar{x} = 27.5$ अत: समांतर माध्य = 27.5

Note :- मध्यमान ज्ञात करने के लिये वर्ग अन्तराल की दोनो सीमाएँ जोड कर दो का

उदाहरण 2 उपरोक्त प्रश्न का कल्पित माध्य ज्ञातकर समांतर माध्य ज्ञात करना (विचलन विधि से)

माना कि कल्पित माध्य A = 25

समांतर माध्य $\bar{x} = A + \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$$\bar{x} = 25 + \frac{50}{20}$$

$\bar{x} = 25 + 2.5 = 27.5$ अत: समांतर माध्य = 27.5

वर्ग - अंतराल	f_i	मध्यमान x_i	$ui = \dfrac{Xi - A}{h}$	$f_i d_i$
0 - 10	3	5	-20	-60
10 - 20	2	15	-10	-20
20 - 30	7	25	0	0
30 - 40	3	35	10	30
40 - 50	5	45	20	100
योग	$\sum f_i$ = 20			$\sum f_i d_i$ = 50

यदि प्रश्न मे पद विचलन विधि से माध्य कि गणना करनी है तो निम्न विधि का उपयोग करते है

कल्पित माध्य = A = 25 , h = 10

A = x मे से माना जावे

h = वर्ग अंतराल

$$\bar{x} = \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

$$\bar{x} = 25 + \frac{5}{20} \times 10$$

$$\bar{x} = 25 + \frac{5}{2}$$

$$\bar{x} = 25 + 2.5$$

$$\bar{x} = 27.5$$

वर्ग - अंतराल	f_i	मध्यमान	u	$f_i d_i$
0 - 10	3	5	-2	-6
10 - 20	2	15	-1	-2
20 - 30	7	25	0	0
30 - 40	3	35	1	3
40 - 50	5	45	2	10

$\sum fi = 20$ $\sum fidi = 5$

बहुलक - वर्ग - अंतराल के प्रश्न मे निम्न सूत्र का प्रयोग करते है

$$\text{बहुलक (Z)} = L + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता

f_0 = बहुलक वर्ग के ठीक पूर्व वर्ग की बारंबारता

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बरंबारता

h = बहुलक वर्ग का अंतराल

बा. बड़ी - जिस वर्ग कि बारंबारता सबसे बड़ी होती है वह बहुलक वर्ग होता है |

उदाहरण 3 निम्न बारंबारता बंटन का बहुलक ज्ञात करो ?

वर्ग - अंतराल	f_i	
0 - 10	3	
10 - 20	2	f_0
20 - 30	7	f_1
30 - 40	3	f_2
40 - 50	5	

सर्वाधिक बारंबारता 7 है

बहुलक वर्ग = 20 - 30

L = 20

$f_1 = 7$

$f_0 = 2$

$f_2 = 3$

h = 10

$$\text{बहुलक (Z)} = L + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

मान रखने पर $= 20 + \left(\frac{7-2}{2 \times 7 - 2 - 3}\right)$

$$= 20 + \left(\frac{5}{14-5}\right) \times 10$$

$$= 20 + \frac{5}{9} \times 10$$

$$= 20 + 5.55$$

$= 25.55$ अत: बहुलक (Z) = 25.55

माध्यक - जब वर्ग अंतराल दिया हो तो निम्न सूत्र से मध्यक ज्ञात करेगे

$$\text{माध्यक (M)} = l + \left(\frac{N/2 - C}{f}\right)$$

यहा L = माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

N = बारंबारताओ का योग

C = माध्यक वर्ग के ठीक पुर्व की संचयी बारंबारता

f = माध्यक वर्ग की बारंबारता

h = वर्ग अंतराल

वर्ग -अंतराल	f_i	Cf
0 - 10	3	3
10 -20	2	5
20 - 30	7	12
30 - 40	3	15
40 - 50	5	20

$N = \sum fi = 20$

चरण -

मा - माध्यक

सी. - Cf

एन का आधा - N/2

मा. सी. के एन का आधा

(1) Cf ज्ञात करना

(2) $N = \sum f$

(3) N/2

(4) N/2 से ठीक बड़ी Cf के सामने वाले वर्ग ही माध्यक वर्ग होगा|

(5) सूत्र मे मान रखकर हल करना|

निम्न बारंबारता बंटन का माध्यक ज्ञात करना

$\frac{N}{2} = \frac{20}{2} = 10$

C

10 से ठीक बड़ी Cf = 12

अत: माध्यक वर्ग = 20 - 30

ℓ = 20

N = 20
C = 5
f = 7
h = 10

माध्यक (m) $= l + \left(\frac{N/2 - C}{f}\right)$

$$= 20 + \left(\frac{20/2 - 5}{7}\right)$$

$$= 20 + \left(\frac{10 - 5}{7}\right)$$

$$= 20 + \frac{5}{7} \times 10$$

$$= 20 + \frac{50}{7}$$

$$= 20 + 7.14$$

$$= 27.14$$

अत: माध्यक = 27.14

महत्वपूर्ण प्रश्न

(1) निम्न बारंबारता बंटन का समांतर माध्य ज्ञात करो ?

वर्ग - अंतराल	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
बारंबारता	9	12	15	10	14

(2) निम्न बारंबारता बंटन का पद विचलन विधि से माध्य ज्ञात करो?

वर्ग - अंतराल	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
बारंबारता	7	10	15	8	10

(3) निम्न बारंबारता बंटन से माध्यक ज्ञात किजिए?

वर्ग	0 - 8	8 - 16	16 - 24	24 - 32	32-40	40 - 48
f_i	42	30	50	22	8	5

(4) निम्न बारंबारता बंटन से बहुलक ज्ञात करो

प्राप्तांक	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
छात्रों की संख्या	4	28	42	20	6

अध्याय –18

अंक भार – 04

प्रायिकता

(Probability)

परिभाषा – किसी घटना के घटित होने की संभावना के आंकिक मान को, प्रायिकता कहते है। किसी घटना A के घटित होने की प्रायिकता को P (A) से व्यक्त करते है।

$$P(A) = \frac{\text{घटना } A \text{ केअनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{घटना } A \text{ के कुल परिणमों की संख्या}}$$

Note :-एक निश्चित घटना की प्रायिकता एक होती है।

- एक असंभव घटना की प्रायिकता शून्य होती है।
- किसी घटना A के लिए $0 \le P(A) \le 1$
- एक घटना A के नहीं घटने की प्रायिकता को P(A') या $P(\overline{A})$ से व्यक्त करते है।
- $P(A) + P(A') = 1$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- किसी घटना A के घटने व नहीं घटने की प्रायिकताओं का योग सदैव 1 होता है।
- एक सिक्का उछालना :–
  कुल परिणामों की संख्या = 2 कुल परिणाम = {H, T}
  H आने की प्रायिकता = ½
  T आने की प्रायिकता = ½
  दो सिक्के एक साथ उछालना या एक सिक्के को दो बार उछालना

कुल परिणाम = {HH, HT, TH, TT} कुल परिणामों की संख्या = 2 x 2 = 4

(1) दो H आने की प्रायिकता = $\frac{1}{4}$

(2) एक H व एक T आने की प्रायिकता = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(3) दो T आने की प्रायिकता = $\frac{1}{4}$

तीन सिक्के उछालना या एक सिक्के को तीन बार उछालना

कुल परिणामों की संख्या = 2 x 2 x 2 = 8

(1) तीन चित आने की प्रायिकता = $\frac{1}{8}$

(2) दो या दो से ज्यादा चित आने की प्रायिकता = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

<u>एक पासा उछालना</u> कुल परिणाम = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
कुल परिणामों की संख्या = 6

(1) सम अंक आना :–
अनुकूल परिणाम = {2, 4, 6} अनुकूल परिणामों की संख्या = 3
प्रायिकता = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(2) विषम अंक आना :–
अनुकूल परिणाम = {1, 3, 5} अनुकूल परिणामों की संख्या = 3
प्रायिकता = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(3) अभाज्य अंक आना :–

अनुकूल परिणाम = {2, 3, 5} अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

प्रायिकता $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(4) 5 या 5 से बड़ी संख्या आना :–

अनुकूल परिणाम = {5, 6} अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

प्रायिकता $\frac{2}{6} = \frac{1}{2}$

(5) पासे पर 7 से कम आने की प्रायिकता $= \frac{6}{6} = 1$

दो पासों को एक साथ उछालना :–

कुल परिणाम = 6 x 6 = 36

द्विक या दोनों पासों पर समान संख्या आना परिणाम

= {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), 5, 5), (6, 6)}

अंकों का योग न्यूनतम = 2

अंकों का योग अधिकतम = 12

योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
परिणामों की संख्या	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ताश

कुल पत्ते 52

लाल रंग (26) काला रंग (26)

पान (13) (Hearts) ईंट (13) (Diamond) हुकुम (13) (Spades) चिडी (13) (Clubs)

13 पत्ते – 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 गुलाम, बेगम, बादशाह, इक्का

कुल गुलाम = 4 कुल इक्के = 4

कुल बेगम = 4 कुल तस्वीर वाले पत्ते = 12

कुल बादशाह = 4

1. काला पत्ता होने की प्रायिकता $= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
2. लाल पत्ता होने की प्रायिकता $= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
3. पान का पत्ता होने की प्रायिकता $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
4. हुकुम का पत्ता होने की प्रायिकता $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
5. ईंट का पत्ता होने की प्रायिकता $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

6. चिडी का पत्ता होने की प्रायिकता = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

7. बादशाह होने की प्रायिकता = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

8. इक्का होने की प्रायिकता = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

9. हुकुम का इक्का होना = $\frac{1}{52}$

10. लाल बादशाह होना = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

लीप वर्ष – 366 दिन → 52 सप्ताह, 2 दिन — 53 रविवार होने की प्रायिकता = $\frac{2}{7}$

अलीप वर्ष – 365 दिन → 52 सप्ताह, 1 दिन — 53 रविवार होने की प्रायिकता = $\frac{1}{7}$

1 से 100 तक अभाज्य संख्याएं :–

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

1 – 25 तक – 9 अभाज्य संख्या

1 – 50 तक – 15 अभाज्य संख्या

1 – 75 तक – 21 अभाज्य संख्या

1 – 100 तक – 25 अभाज्य संख्या

भाजकता का ज्ञान करवाना :–

1 – 100 तक 5 से भाज्य संख्याऐं $= \frac{100}{5} = 20$

1 – 100 तक 7 से भाज्य संख्याऐं $= \left[\frac{100}{7}\right] = 14$

डदाहरण (1) $P(A) = \frac{2}{5}$ हैं तो $P(A') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

विद्यार्थियों को 1 में से घटाने का ज्ञात करवाना।

उदाहरण (2) एक बॉक्स में 25 पेन अच्छे व 5 पेन खराब है तो एक को चुने जाने पर उसके अच्छे होने की प्रायिकता ज्ञात करना।

अच्छे पेनों की संख्या = 25

खराब पेनों की संख्या = 5

कुल पेनों की संख्या = 30

अच्छा पेन होने की प्रायिकता = $\frac{\text{अच्छे पेनों की संख्या}}{\text{कुल पेन}} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

अध्याय – 19

सड़क सुरक्षा शिक्षा

1. CCTv का पूरा नाम– क्लोज्ड़ सर्किट टेलीविजन।
2. PUC का पूरा नाम– पोल्यूशन अन्ड़र कण्ट्रोल सर्टिफिकेट।
3. यातायात संकेतों में लाल बत्ती की आकृति– अष्ट भुजाकार।
4. रोक दूरी = प्रतिक्रिया दूरी + अवरोध दूरी
5. प्रतिक्रिया दूरी = रोक दूरी – अवरोध दूरी
6. अवरोध दूरी = रोक दूरी – प्रतिक्रिया दूरी
7. संख्या 19, 20, 21 को लयबद्ध बोलने में लगने वाला समय = 1 सेकण्ड़।
8. प्रत्येक वाहन के लिए CPU / PUC में से कौनसा आवश्यक है– PUC ।
9. दुपहिया वाहन चलाते समय सिर की सुरक्षा हेतु क्या पहनना आवश्यक है? – हेलमेट।
10. हमें सड़क के किस ओर चलना चाहिए? – बांयी ओर।
11. PUC को बढ़ावा देने के लिए सरकार ने पेट्रोल के स्थान पर कौनसी गैसों के प्रयोग करने की योजना शुरू की? – LPG और CNG।
12. सड़क सुरक्षा में CCTv कैमरा के उपयोगः– (i) इसके द्वारा चारों ओर का दृश्य दिखाई देता है जिससे कोई भी व्यक्ति यातायात नियमों का उल्लंघन करने से ड़रता है। (ii) इसके द्वारा किसी अपराधी का पीछा करके उसकी उस मार्ग से गुजरने की स्थिति का भी पता लगाया जा सकता है। (iii) कोई सड़क दुर्घटना होने पर CCTv द्वारा पता लग जाने से तुरन्त रोगी वाहन सेवा (Ambulance) को भेजा जा सकता है।
13. वाहनों के चालान करने के कारणः– (i) यातायात के नियम तोडना। (ii) हेलमेट या सीटबेल्ट का उपयोग न करना। (iii) वाहन चलाते समय मोबाइल का उपयोग करना। (iv) पुलिस व एम्बुलेंस के हॉर्न के समान हॉर्न लगवाना। (v) ड्राइविंग लाइसेंस, RC, PUC तथा इंस्योरेंस में से कोई एक या सभी का न होना। (vi) वाहनों की नम्बर प्लेट पर लिखे नम्बरों का मानक आकार में नहीं होना।
14. यदि कविता अपनी कार से पहली, दूसरी, तीसरी व चौथी सिग्नल लाइट को क्रमशः 4, 9, 14, 19 सेकण्ड़ में पार करती है, तो 20वीं सिग्नल लाइट कितने समय में पार करेगी?

हल– पहली, दूसरी, तीसरी एवं चौथी सिग्नल लाइट को पार करने में लगा समयः– 4, 9, 14, 19

यहॉ 9–4=5, 14–9=5, 19–14=5, अर्थात् अंतर समान है। अतः यह एक समान्तर श्रेढ़ी है, जिसमें–

प्रथम पद (a) = 4, सार्व अन्तर (d) = 5

अतः 20वां पद $= a+(n-1)d$

$= 4+(20-1)X5$

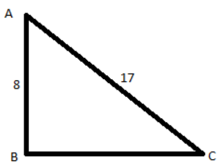
$= 4+19X5$

$= 4+95 = 99$

अतः 20वीं सिग्नल लाइट पार करने में 99 सेकण्ड़ का समय लगेगा।

15. एक सीधे व 8 मीटर ऊॅचे पोल पर यातायात नियंत्रण के लिए CCTv कैमरा लगा है जो चारों आर घूम सकता है। यह पोल के शीर्ष से 17 मीटर दूर दृष्टि रेखा तक यातायात देख सकता है। बताइये कि यह कैमरा कितना क्षेत्रफल यातायात देख सकता है?

हल– पाइथोगोरस प्रमेय से–



$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

$\Rightarrow 8^2 + BC^2 = 17^2$

$\Rightarrow 64 + BC^2 = 289$

$\Rightarrow BC^2 = 289 - 64$

$\Rightarrow BC^2 = 225$

$BC = \sqrt{225}$

$BC = 15$ मीटर

अतः BC के अनुसार केन्द्र B के चारों ओर 15 मीटर दूरी तक क्षेत्रफल दिखाई देगा, जो कि वृत्ताकार क्षेत्र होगा।

अतः पोल के चारों ओर कैमरे द्वारा दिखाई देने वाला क्षेत्रफल $= \Pi r^2$

$= \frac{22}{7} X 15 X 15$

= 707.14 वर्ग मीटर।

16. किसी सड़क दुर्घटना में मरने वालो का प्रतिशत वर्षवार निम्न दण्ड़ आलेख के अनुसार दर्शाया गया है–
    - (i) वर्ष 2012 व 2015 में होने वाली मौतों का अनुपात बताओ।
    - (ii) वर्ष 2016 में हुई मौतें वर्ष 2015 में हुई मौतों से कितने प्रतिशत ज्यादा है?

हल– (i) 2012 की संख्या : 2015 की संख्या

10 : 25

2 : 5

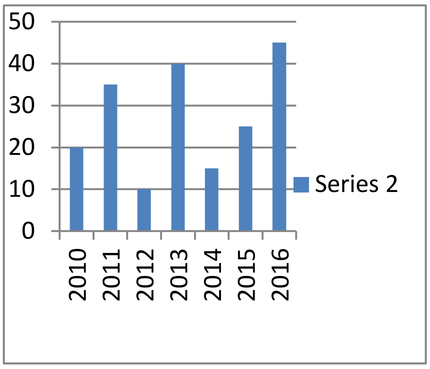
(ii) 2016 में हुई मौतें = 45000

2015 में हुई मौतें = 25000

अन्तर = 45000 − 25000 = 20000

प्रतिशत वृद्धि = $\frac{20000}{25000} X100$

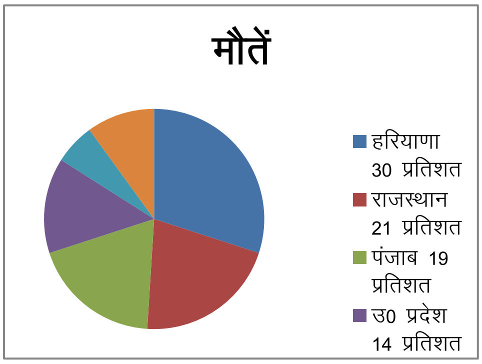
= 80%



17. निम्न पाई चार्ट में विभिन्न राज्यों में दुर्घटना से हुई मौतों का आंकड़ा प्रदर्शित है। यदि इन सभी राज्यों में कुल मौतें 125000 हों तो–

(i) राजस्थान मे होने वाली मौतें कितनी हैं?

(ii) म0 प्रदेश व हरियाणा में हुई मौतों का योगा कितना है?



हल– (i) राजस्थान में होने वाली मौतें $= \frac{21}{100} X125000 = 26250$

(ii) म0 प्रदेश व हरियाणा में हुई मौतों का योग $= \frac{(10+30)}{100} X125000$

$= \frac{40}{100} X125000 = 50000$

अभ्यास हेतु महत्वपूर्ण प्रश्नः–

1. एक सीधे व ऊर्ध्वाधर पोल पर यातायात नियंत्रण के लिए CCTv कैमरा लगा है। जो पोल के शीर्ष से 113 मीटर दृष्टि रेखा तक यातायात देख सकता है। यदि पोल के चारों ओर यह कैमरा 39424 वर्ग मीटर यातायात देख सकता है, तो पोल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. एक रोड स्टोन से 30वॉ सिग्नल कितनी दूर लगा है, जबकि 11वॉ सिग्नल 380 मीटर व 16वॉ सिग्नल 730 मीटर पर लगा है।
3. दो कारें A व B एक हाइवे पर 200 Km. की दूरी पर हैं, यदि A व B एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करती हैं तो समान दिशा में 5 घण्टे व विपरित दिशा में 1 घण्टे में मिलती हैं, तो इनकी चाल ज्ञात करो

प्रयास–2018 के तहत राज्य स्तरीय गणित कार्यशाला मे उपस्थित सम्भागी

क्र. सं.	नाम कार्मिक	पद	पदस्थापन स्थान	जिला
1	कुसुम लता पोखरना	प्राध्यापक	राउमावि चीरवा	उदयपुर
2	कुसुम बारोला	व0अ0	राउमावि डबोक	उदयपुर
3	नीता खत्री	व0अ0	राउमावि मटून	उदयपुर
4	मदन लाल आमेटा	प्राध्यापक	रा.कवरपदा उमावि उदयपुर	उदयपुर
5	गुलाम श्ब्बीर	व0अ0	राउमावि काछबा गोगुन्दा	उदयपुर
6	नरेन्द्र सिंह राठौड	व0अ0	राउमावि अलसीगठ	उदयपुर
7	नरेन्द्र चपलोत	व0अ0	रामावि भटेवर	उदयपुर
8	मन्जु चौधरी	प्राध्यापक	रा0कवरपदा उमावि उदयपुर	उदयपुर
9	भूपाल सिंह बाबेल	व0अ0	राउमावि बडी	उदयपुर
10	प्रवीण कुमार शाह	व0अ0	रामावि सालिया गठी	बॉसवाड़ा
11	प्रभाकर शर्मा	व0अ0	राउमावि देवगढ	प्रतापगढ़
12	प्रभा शंकर आमेटा	प्र0अ0	रामवि टूस डांगियान	उदयपुर
13	संजय कुमार बोल्या	व0अ0	रामावि बोचणा	उदयपुर
14	अजय कुमार	व0अ0	राउमावि कोट	उदयपुर
15	नन्द लाल गमेती	व0अ0	राउमावि लूणदा	उदयपुर
16	दिनेश कुमार दशोरा	प्रधानाध्यापक	रामावि नया	उदयपुर
17	निशा दशोरा	व.अ.	राबाउमावि, रेलमगरा	राजसमन्द
18	संदीप आमेटा	प्राध्यापक	रा.फतह उमावि, उदयपुर	उदयपुर
19	जितेन्द्र सिंह वाघेला	व.अ.	राआउमावि बॉकड़ा	डूंगरपुर
20	नीता लालवानी	व.अ.	राबाउमावि, आयड़	उदयपुर
21	अपिला भटनागर	व.अ.	राबाउमावि रेजीडेन्सी	उदयपुर
22	रामअवतार सैनी	व.अ.	राउमावि पीलीखेड़ा	प्रतापगढ़
23	सुरेश कुमार लावारा	व.अ.	राउमावि सुभाषनगर	भीलवाड़ा
24	रविकान्त	व.अ.	राउमावि रामसत्यनारायण	भीलवाड़ा
25	राकेश अग्रवाल	प्राध्यापक	राआउमावि किशनपुरा	हनुमानगढ़
26	भंवर लाल बिशनोई	व.अ.	रामावि ढण्ढोरा भोपालगढ़	जोधपुर
27	मनीष दवे	व.अ.	राउमावि नारवा, मण्डोर	जोधपुर
28	अनिल कुमार तिवारी	व.अ.	राउमावि कोकुण्डा	जोधपुर
29	सुनिल कुमार जोशी	व.अ.	राउमावि घाटोदा	डूंगरपुर
30	अजय कुमार अग्रवाल	व.अ.	रामावि बीची, फणी	जयपुर
31	राजेन्द्र कुमार पंचाल	व.अ.	राउमावि आड़, धरियावद	प्रतापगढ़
32	सुरेन्द्र पाल सिंह मीणा	व.अ.	राउमावि सुहागपुरा	प्रतापगढ़
33	अमरेंग गायरी	व.अ.	राउमावि लिमयान	बांसवाड़ा
34	विजय कुमार पाठक	व.अ.	राउमावि पडौली गोर्धन	बांसवाड़ा
35	ओमप्रकाश	व.अ.	रामावि इदली रोहर	पाली
36	राजूराम	व.अ.	राउमावि बागोड़ा	जालोर
37	श्याम सुन्दर लोहार	प्राध्यापक	राउमावि सुमेरपुर	पाली
38	दिलीप सिंह परमार	व.अ.	राउमावि बागसीन	सिरोही
39	देवेन्द्र कुमार आर्य	प्राध्यापक	राउमावि पालड़ी	सिरोही

40	रमेश कुमार खत्री	प्राध्यापक	राउमावि बागसीन	सिरोही
41	छैल बिहारी शर्मा	व.अ.	रामावि रामपुरा	जयपुर
42	विजय कुमार शर्मा	व.अ.	राउमावि गोहन्दी	जयपुर
43	दीपक चन्द टेलर	व.अ.	रामावि रामपुरा	जयपुर
44	पप्पु लाल कुमावत	व.अ.	राउमावि धांधोली	जयपुर
45	संजय पण्डया	प्राध्यापक	राउमावि कनबा	डूंगरपुर
46	जुगल किशोर मीणा	व.अ.	राउमावि पिपलवास	चित्तौड़गढ़
47	राजेन्द्र यादव	व.अ.	राबाउमावि म.द.मार्ग	बीकानेर
48	राजेन्द्र स्वामी	व.अ.	राबाउमावि गुसारेसर	बीकानेर
49	प्रदीप कुमार	व.अ.	रामावि बालू	बाड़मेर
50	बबीता कुमार	व.अ.	राउमावि काररिया	बाड़मेर
51	अरूणा कुमारी लोढ़ा	व.अ.	राउमावि मंगलवाड़	चित्तौड़गढ़
52	दीपक चौधरी	प्राध्यापक	स्वामी वि.रा.मा.स्कूल बागोर	भीलवाड़ा
53	प्रसन्ना मुरला	व.अ.	महारावल राउमावि डूंगरपुर	डूंगरपुर

–: विशिष्ट योगदान :–

1 शरद कुमार पारीक , प्रधानाचार्य , राउमावि, तिरोल (सायरा) ,उदयपुर
2 महेश चन्द्र शर्मा , प्राध्यापक भौतिक , राउमावि, पानेरियों की मादडी , उदयपुर
3 संजय बोल्या ,वरिष्ठ अध्यापक , रामावि , बोयणा (मावली) , उदयपुर
4 प्रिया भादवीया , प्राध्यापक गणित , रागुगोसिंहउमावि , उदयपुर
5 मदन आमेटा , प्राध्यापक गणित , राकॅवरपदाउमावि , उदयपुर